Batch PDF M

Batch PDF M

Ain Shams University
Faculty of Science

Principles of Calculus

Differentiation and Integration

For 1-st Year in Physical Science

By Doctor

Intesarat Al-Shobky

Professor of Pure Mathematics

in the Faculty of Science - Ain Shams University

Academic Year of 1989

كليـــة العلوم

مبادىء
التفاضل والتكامل

للسنة الاولى علوم طبيعة

دكتورة

انتصارات الشبـــــكى

استاذ الرياضة البحتـــه

كلية العلوم — جامعة عين شمس

١٩٨٦

Remember your God in all the day of your life

If any of you falls short in wisdom, he should ask God for it and it will be given him, for God is a generous giver who neither refuses nor reproaches anyone. But one must ask in faith, without a doubt in his mind, for the doubter is like a heaving sea suffled by the wind.

George FAM Gabriel

كليـــة العلوم

A Brief History of Time
By professor
Stephen Hawkings.

مبادىء
التفاضل والتكامل

للسنة الاولى علوم طبيعة

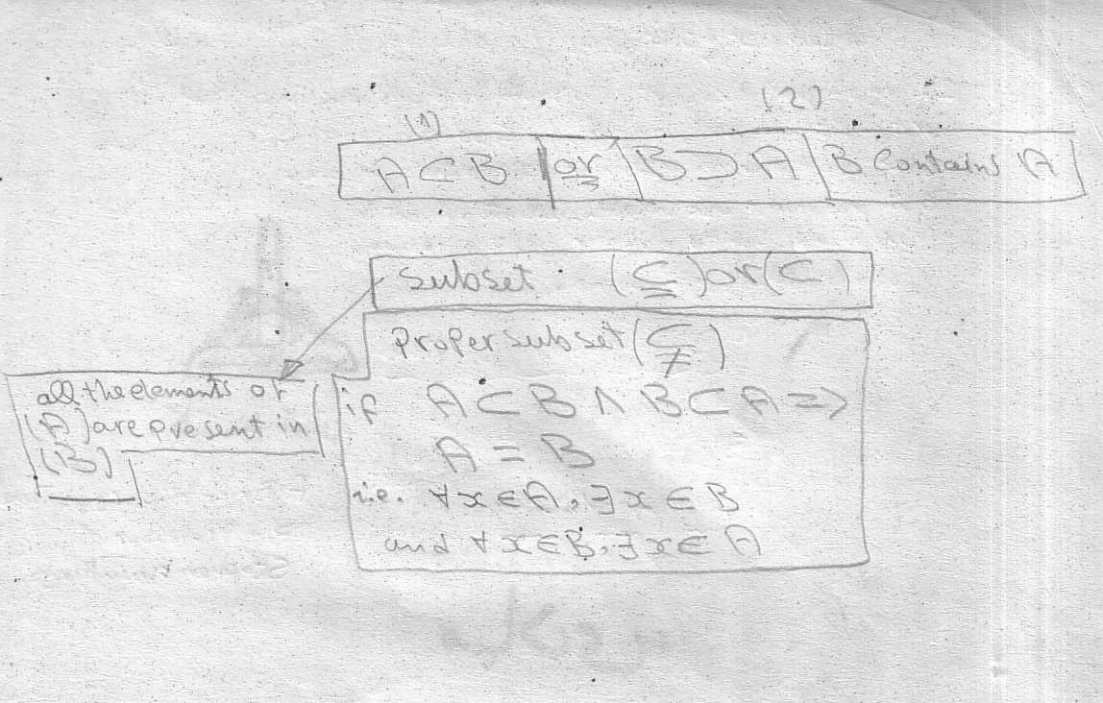
دكتورة

انتصارات الشبـــــكى

استاذ الرياضة البحتـــه

كلية العلوم – جامعة عين شمس

١٩٨٦


(1)
(2)
A ⊂ B
or
B ⊃ A
B Contains A
subset (⊆) or (⊂)
Proper subset (⊊)
if A ⊂ B ∧ B ⊂ A ⇒
A = B
i.e. ∀x ∈ A, ∃x ∈ B
and ∀x ∈ B, ∃x ∈ A
all the elements of (A) are present in (B)

محتويات الكتاب

الصفحة	الموضوع
	الجزء الأول (التفاضل)
١	الفصل الأول (الفئات والأعداد الحقيقية)
١	الفئات
٩	أمثلة محلولة
١١	تمارين عن الفئات
١٤	الأعداد الحقيقية
١٧	تمارين عن الأعداد الحقيقية
١٩	الفصل الثاني (الدوال)
٢٦	تمارين عن الدوال
٢٧	أنواع الدوال
٢٩	الفصل الثالث (الدوال المتصلة والنهايات)
٣٦	تمارين عن النهايات
٣٨	الدوال المتصلة
٤٦	تمارين عن اتصال الدوال
٤٧	الفصل الرابع (تفاضل الدوال)
٦٥	تمارين عن مشتقات الدوال الجبرية
٦٢	الفصل الخامس (الدوال الأولية في المتغير الحقيقي)
٦٢	ا- الدالة الأسية واللوغارتمية
٧٥	تمارين عن الدوال الأسية واللوغارتمية
٧٧	ب- الدوال المثلثية
٨٥	تمارين
٨٦	الدوال المثلثية العكسية
٨٩	تمارين
٩١	جـ- الدوال الزائدية
٩٨	تمارين
١	د- القيم البارامترية للمنحنيات

الصفحة	الموضوع
١٠٤	الفصل السادس (القيم العظمى والصغرى)
١٠٥	القيم غير المحدودة
١٠٨	تمارين
١١٠	الفصل السابع تقريب الدوال
١١٢	مراجع عامة التي ترد في هذه الأبواب السابقة

الجزء الثاني مبادئ التكامل

١٤٤	الفصل الأول التكامل غير المحدود
١٥٠	تمارين عن أصول القياسية للتكامل
١٥١	طرق التكامل
١٥٥	التكامل بالتجزئ
١٥٧	التكامل بالتعويض
١٦٠	تمارين
١٦٤	الفصل الثاني (بعض أنواع التكاملات)
١٦٥	تمارين
١٦٦	التعويضات المثلثية
١٦٧	تمارين
١٦٨	الفصل الثالث (التكامل المحدود)
١٨١	الفصل الرابع (التكامل كنهاية مجموع)
١٨٦	بعض تطبيقات التكامل

الفصل الثامن

بسم الله الرحمن الرحيم

سوف نستخدم بعض الرموز في هذا البحث وتكون ثابتة إلا إذا أشير صراحة إلى غير ذلك أثناء الدرس.

للفئات سيكون الرمز المستخدم أحد الحروف $X, Y, Z, \ldots$ أي الحروف اللاتينية الكبيرة.

للعناصر داخل هذه الفئات نستخدم الحروف اللاتينية الصغيرة $x, y, z, \ldots$

للثوابت نستخدم الحروف $a, b, c, \ldots$

للدلالة على أنه المقدار ثابت طول الحديث في الجزء الخاص به.

أيضا بعض الرموز الأخرى مثل $\in$ ونقطه "بالبند" للدلالة على الانتماء. وتكتب أحيانا بصورة مختلفة وهي الحروف اليونانية مثلا ε، وفي هذا البحث نستخدم الحرف ε للدلالة على عدد حقيقي موجب قد يكون صغيرا أو كبيرا. ولنفس الشرط نستخدم الحرف اليوناني δ ونقطه "دلتا" للدلالة أيضا على عدد حقيقي موجب قد لا نعتمد على ε.

لكتابة الفئات نستخدم الأقواس $\{\ \}$.

نستخدم الحرف ϕ ونقطه فاي للدلالة على الفئة الخالية من العناصر.

أيضا نستخدم الرمز R للدلالة على الأعداد الحقيقية

" " N " " " الطبيعية

" " Z " " " الصحيحة.

" نستخدم الرمز Q " " " النسبية

الفصل الأول .. الفئات والأعداد الحقيقية

مفهوم الفئات :

لبناء أى نظرية نبدأ ببعض العناصر كأساسيات ثم بواسطة هذه الأساسيات نعرف باقى العناصر . وبالنسبة لموضوع الفئات سوف نبدأ بشرح مفهوم الفئة وليس بتعريف الفئة . فأى تجمع من الأشياء نطلق عليه فى الحياة العادية كلمة فئة فنقول :

- فئة الطلاب الموجودة فى فصل معين .
- فئة العائلات التى يزيد عدد افرادها عن 5 أفراد .
- الفئة المكونة من الأعداد 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 .
- فئة المنازل التى يزيد ايجارها عن 20 جنيها مصريا شهريا .
- فئة الحروف المستخدمة فى كلمة « كل عام وانتم بخير »
- فئة سائقى التاكسى
- فئة الكتب الموجودة فى مكتبة معينة
- الفئة المكونة من الفيل ، العدد 5 ، كوكب المريخ .

الأشياء التى تخص فئة معينة سوف نطلق عليها عناصر هذه الفئة فإذا كانت X فئة ما ، وكان الشئ x يخص هذه الفئة نكتب $x \in X$ ونقرأ x أحد عناصر الفئة X . وفى حالة كون y ليس أحد عناصر X فنكتب ذلك على الصورة $y \notin X$

مثال : إذا كانت X هى فئة جميع الأعداد الموجبة فأننا نكتب ذلك بالطريقة الآتية

$$X = \{ x , x > 0 , x \in R \}$$

ونقرأ هذه كون 3 أحد عناصر الفئة X وبالتالى $3 \in X$ وهذه كون -3 ليست أحد عناصر X بالصورة $-3 \notin X$

نلاحظ أنه الفئة تعين تماما باحدى طريقتين :

- ذكر كافة عناصر الفئة كما فى مثال (١٣) ،
- ذكر الخاصية المشتركة التى تتصف بها عناصر الفئة كما فى باقى الأمثلة .

ونرمز للصفة المشتركة بالرمز $P(x)$.

إذا كانت فئة ما بالطريقة (I) فاننا نكتب جميع عناصر الفئة بين قوسين $\{ \}$

أما اذا استخدمنا الطريقة (ii) فإننا نستخدم احد الرموز للدلالة على عنصر ما من الفئة والصفة المميزة لهذه الفئة فنكتب مثلاً مثال (٢) على الصورة

{ حيث x عائلة يزيد عدد أفرادها عن أفراد x }.

ولفضل استخدام الطريقة الثانية (ii) لوصف الفئة عندما يكون عدد عناصر الفئة كبيراً أو عندما يكون من الصعب ذكر جميع عناصر الفئة.

ولما الفئة ص تحتوي من العناصر فإننا نقول الفئة الخالية من العناصر ويرمز لها عادة بالرمز ϕ وليس غير.

فمثلاً فئة الأعداد الموجبة وأقل من الصفر فئة خالية من العناصر، وكذلك فئة الأعداد الصحيحة الغير الموجبة أيضاً فئة خالية، وفئة الأعداد الزوجية التي تقبل القسمة على 27 فئة خالية.

يلاحظ أن ترتيب العناصر داخل الفئة غير ذي قيمة فمثلاً الفئات $\{a,b,c\}$ ، $\{a,a,b,c,c,c\}$ ، $\{b,b,b,c,a\}$ كلها رموز للفئة $\{a,b,c\}$.

تمارين:

(١) أوجد فئة العناصر التي تحقق المعادلة $x^2+9=0$ حيث x عدد حقيقي.

(٢) أوجد فئة العناصر التي تحقق المعادلة $x^2+2x+3=0$ حيث x عدد حقيقي.

تساوي الفئات:

الفئتان X، Y متساويتان إذا وفقط إذا احتوت كل منهما على نفس العناصر ونرمز لذلك $X=Y$ أما إذا احتوت إحداهما على عناصر ليست موجودة في الأخرى فنكتب ذلك على الصورة $X \neq Y$

الفئات الجزئية:

الفئة X تسمى فئة جزئية من الفئة Y إذا وفقط إذا كان كل عنصر من عناصر X هو عنصر من عناصر Y ويرمز لذلك

بالرمز $X \subseteq Y$ وتسمى الفئة الجزئية X فئة فعلية من الفئة Y اذا وفقط اذا كان $X \subseteq Y$ ، $X \neq Y$ ويرمز لذلك بالرمز $X \subset Y$

وهذا يعني أن $X \subset Y \rightarrow X \subseteq Y$

ومن هذا يكون القول أن الفئة الخالية ϕ فئة جزئية من أي فئة.

نظرية (١) (b)

اذا كانت X ، Y ، Z ثلاث فئات فان:

(i) $X \subseteq X$

(ii) $X \subseteq Y$ ، $Y \subseteq Z \rightarrow X \subseteq Z$

(iii) $X \subseteq Y$ ، $Y \subseteq X \rightarrow X = Y$

البرهان

(i) برهان هذا الجزء يأتي مباشرة من التعريف

(ii) اذا كانت $X \subseteq Y$ ، $Y \subseteq Z$ وكانت $x \in X$ فانه يقتضي أن $x \in Y$ وذلك لان $X \subseteq Y$ وبالتالي فان $x \in Z$ وذلك لان $Y \subseteq Z$ وبالتالي نحصل على $X \subseteq Z$.

(iii) لنفرض أن $X \subseteq Y$ ، $Y \subseteq X$ بينما $X \neq Y$ من التعريف (c) الأخير يوجد عنصر x (!) حيث أن $x \in X$ بينما $x \notin Y$ أي $x \in Y$ ، $x \notin X$ وذلك من لفرض $X \subseteq Y$ اذا التعريف (i) غير صحيح وكذلك لان $Y \subseteq X$ فان التعريف (c) غير صحيح. ومن ذلك يقتضي أن $X = Y$.

نظرية (٢)

اذا كانت X ، Y ، Z ثلاث فئات فان:

(i) $X \not\subset X$

(ii) $X \subset Y$ ، $Y \subset Z \longrightarrow X \subset Z$

(iii) $X \subset Y$ ، $Y \subseteq Z \longrightarrow X \subset Z$

البرهان:

ترك للطالب كتمرين.

فئة القدرة. هي الفئة التي تحتوي جميع الفئات الجزئية لفئة معينة.

الاتحاد والتقاطع (جبر المجموعات)

اذا كانت X، Y مجموعتان فان اتحادهما ويرمز له بالرمز $X \cup Y$ هو مجموعة جميع العناصر x بحيث $x \in X$ أو $x \in Y$ ويكتب ذلك على الصورة

$$X \cup Y = \{ x ; \ x \in X \text{ or } x \in Y \}.$$

اذا كانت X، Y مجموعتان فان تقاطع المجموعتين ويرمز له بالرمز $X \cap Y$ هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى كل من X، Y في نفس الوقت أي أن

$$X \cap Y = \{ x ; \ x \in X \text{ and } x \in Y \}.$$

ومن التعريف السابق ينتج أن

$$X \cap Y \subseteq X \subseteq X \cup Y$$

(Processes on Union and Supsets)

(أ) نظرية (٢):

اذا كانت X، Y، Z ثلاث مجموعات فان:

(i) $X \cup Y = Y \cup X$ (قانون الإبدال)

(ii) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ (قانون الدمج)

(iii) $X \subseteq Z, \ Y \subseteq Z \rightarrow X \cup Y \subseteq Z$.

البرهان:

سنبرهن فقط العلاقة (ii)،

لبرهان صحة العلاقة نبدأ بإثبات أن الطرف الأيسر مجموعة جزئية من الطرف الأيمن، ثم نثبت أيضا أن الأيمن مجموعة جزئية من الأيسر ومن التعاريف السابقة ينتج تساوي الطرفان.

لذلك نفرض عنصراً في الطرف الأيسر ونثبت أنه أيضا أحد عناصر الطرف الأيمن.

ليكن $x \in X \cup (Y \cup Z)$ ومن ذلك ينتج أن $x \in X$ أو $x \in Y \cup Z$. فإذا كان $x \in X$ فإن $x \in X \cup Y$ وبالتالي $x \in (X \cup Y) \cup Z$ أي الطرف الأيسر فنحصل الطرف الأيمن

اما اذا كان $x \notin X$ وبالتالي فينتج انه $x \in Y \cup Z$ فينتج انه $x \in Y$ او $x \in Z$ وهذا يعني ان $x \in X \cup Y$ او $x \in Z$ اي انه $x \in (X \cup Y) \cup Z$

اذا

$$X \cup (Y \cup Z) \subseteq (X \cup Y) \cup Z \quad (1)$$

في جميع الحالات.

ولاثبات احتواء الطرف الايسر على الطرف الايمن نبدأ بعنصر ما في الطرف الايمن اي انه $x \in (X \cup Y) \cup Z$ وبالتالي $x \in X \cup Y$ او $x \in Z$.

فاذا كان $x \in Z$ فان $x \in Y \cup Z$ وهذا $x \in X \cup (Y \cup Z)$، واذا كان $x \notin Z$ فان $x \in X \cup Y$ وهذا يعني ان $x \in Y$ اي ان $x \in Y \cup Z$ وايضا $x \in X \cup (Y \cup Z)$

اي $x \notin Y$ فان $x \in X$ وهذا ينتج انه $x \in X \cup (Y \cup Z)$

اي انه في جميع الحالات

$$(X \cup Y) \cup Z \subseteq X \cup (Y \cup Z) \quad (2)$$

بالحصر نحصل على

انه انه السابق ناتج بالتكافؤ من (1) (2).

نظرية (٤): (Processes on intersection and subsets)

اذا كانت X, Y, Z ثلاث فئات فان

(i) $X \cap Y = Y \cap X$ لابدال

(ii) $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$ للدمج

(iii) $Z \subseteq X, Z \subseteq Y \longrightarrow Z \subseteq X \cap Y$.

يترك البرهان كخطوات مماثلة لنظرية (٣).

نظرية (٥):

اذا كانت X, Y فئات فان

(i) $X \cup (X \cap Y) = X$, Union and intersection

(ii) $X \cap (X \cup Y) = X$, Intersection and Union of sets

البرهان:

في الواقع أن $X \subseteq X \cup (X \cap Y)$ وأيضا $X \cap (X \cup Y) \subseteq X$
وسوف نثبت فقط العلاقات العكسية أي أن
$X \cup (X \cap Y) \subseteq X$, $X \subseteq X \cap (X \cup Y)$.

ولنبدأ بالطرف $X \cup (X \cap Y)$ وليكن $x \in X \cup (X \cap Y)$
فإذا كانت $x \notin X \cap Y$ فإن $x \in X$.
أما إذا كانت $x \in X \cap Y$ فإن $x \in X$ و $x \in Y$
وبما أن $x \in X$ لكل عنصر $x \in X \cup (X \cap Y)$ أي أن
$X \cup (X \cap Y) \subseteq X$.

ولإثبات (ii) إذا كانت $x \in X$ فإن $x \in X \cup Y$ وبالتالي
فإن $x \in X \cap (X \cup Y)$ أي أن
$X \subseteq X \cap (X \cup Y)$.

نظرية (٦) : (قانون التوزيع)

إذا كانت X ، Y ، Z مجموعات فإن :

distributing union on intersection or intersection on union.

(i) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
(ii) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

البرهان :

سوف نثبت (i) ونترك (ii) كتمرين للطالب
لتكن $x \in X \cup (Y \cap Z)$. فإذا كانت $x \in X$ فإن $x \in X \cup Y$
وأيضا $x \in X \cup Z$ وبالتالي نحصل على $x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
أي أن $X \cup (Y \cap Z) \subseteq (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
أما إذا كانت $x \notin X$ فإن $x \in Y \cap Z$ أي أن $x \in Y$ و
$x \in Z$ بالتالي $x \in (X \cup Y)$ وأيضا $x \in (X \cup Z)$
وبذلك نحصل مرة أخرى على
$X \cup (Y \cap Z) \subseteq (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
ولإثبات العكس . نأخذ أحد عناصر الطرف الأيمن ونحاول أن
نتمكن من الوصول إلى الطرف الأيسر . أي أن $x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
فإذا كانت $x \in X$ فإن $x \in X \cup (Y \cap Z)$

$$(X \cup Y) \cap (X \cup Z) \subseteq X \cup (Y \cap Z).$$

أما إذا كانت $x \notin X$ فإنه $x \in Y$ ، $x \in Z$ وبالتالي $x \in Y \cap Z$ وبذلك نجد أنه $x \in X \cup (Y \cap Z)$

ومع أجزاء كذا نه $(X \cup Y) \cap (X \cup Z) \subseteq X \cup (Y \cap Z)$

وبذلك يكون تم أثبات علاقة التساوي في (i) .

الفئات المنفصلة (disjoint sets)

تسمى الفئتان X ، Y فئتان منفصلتان إذا كان

$$X \cap Y = \phi$$

يلاحظ أنه $X \cup Y \neq \phi$ إلا إذا كان كل من X ، Y فئات خالية.

الفئة الشاملة (Universal set)

تسمى الفئة U فئة شاملة إذا احتوت على جميع الفئات الجزئية المتعامل معها في نظرية ما أو موضوع ما.

فإذا كانت U هي الفئة الشاملة وكانت X أي فئة جزئية من U بحيث $X \subseteq U$ فإن الفئة المكملة للفئة X ويرمز لها بالرمز X^c هي فئة جميع العناصر الموجودة في U وليست موجودة في X وتساوي أيضا $U - X$ ويعبر عنها رياضيا:

$$X^c = \{ x ;\ x \in U \text{ and } x \notin X \}$$

$$\boxed{X^c = U - X}$$

نظرية (٧):

إذا كانت X ، Y فئتان فإن:

(i) $X - X = \phi$ ، $X - \phi = X$

(ii) $X - Y \subseteq X$

(iii) $X \cap Y = X - (X - Y)$

البرهان:

يترك كتمرين للطالب.

نظرية (٨):

إذا كانت X, Y, Z ثلاث فئات فإن:

(i) $(X \cup Y) - Z = (X - Z) \cup (Y - Z)$,

(ii) $(X \cap Y) - Z = (X - Z) \cap (Y - Z)$,

(iii) $X - (Y \cup Z) = (X - Y) \cap (X - Z)$,

(iv) $X - (Y \cap Z) = (X - Y) \cup (X - Z)$.

البرهان:

سوف نثبت (iv) ونترك باقي النظرية كتمرين

فإذا كانت $x \in X - (Y \cap Z)$ فإن $x \in X$ ، $x \notin Y \cap Z$

وهذا يعني أنه $x \notin Y$ أو $x \notin Z$. فإذا كانت $x \notin Y$

فإن $x \in X - Y$ أي $x \notin Z$ فإن $x \in X - Z$

وفي كلتا الحالتين $x \in (X - Y) \cup (X - Z)$

وهذا $X - (Y \cap Z) \subseteq (X - Y) \cup (X - Z)$.

ولبرهان الطرف العكسي نبدأ $x \in (X - Y) \cup (X - Z)$. فإذا كانت

$x \in X - Y$ فإن $x \in X$ ، $x \notin Y$ وبالتالي نحصل على

$x \in X - (Y \cap Z)$ وبالمثل إذا كانت $x \in X - Z$ فإننا نجد

$x \in X - (Y \cap Z)$ وهذا يعني

$$(X - Y) \cup (X - Z) \subseteq X - (Y \cap Z).$$

نظرية (٩):

إذا كانت X, Y, Z ثلاث فئات وكانت $Y \subseteq Z$ فإن

(i) $X \cup Y \subseteq X \cup Z$

(ii) $X - Y \supseteq X - Z$

(iii) $X \cap Y \subseteq X \cap Z$

(iv) $Y - X \subseteq Z - X$.

$Y \subseteq Z \Leftrightarrow \forall x \in Y \Rightarrow x \in Z$

$x \in X \vee x \notin Y$

البرهان:

يترك البرهان كتمرين للطالب

Look

Complement

نظرية (١٠):

اذا كانت X, Y فئات جزئية من فئة شاملة U فإن

(i) $X \cup X^c = U \quad , \quad X \cap X^c = \phi$

(ii) $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$

(iii) $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$

البرهان:

برهان (ii)

$$(X \cup Y)^c = U - (X \cup Y) = (U - X) \cap (U - Y)$$
$$= X^c \cap Y^c .$$

يترك باقي البرهان للطالب .

مثال (١)

أثبت صحة أن

(i) $A - B = (A \cup B) - B$

(ii) $A - B = (A \cap B^c) = A \cap (A - B)$

(iii) $A - B = B^c - A^c) = (A - B) - A^c$

برهان (i) .

لتكن $x \in A$ and $x \notin B$ أي $x \in A - B$ وبذلك نحصل على $x \in A \cup B$, $x \notin B$.

أي نحصل على $x \in (A \cup B) - B$. إذن

$$A - B \subseteq (A \cup B) - B$$

ولإثبات الاحتواء العكسي

$$x \in (A \cup B) - B \longrightarrow x \in A \cup B \text{ and } x \notin B$$
$$\longrightarrow [x \in A \text{ or } x \in B] \text{ and } x \notin B$$
$$\longrightarrow x \in A \text{ and } x \notin B$$
$$\longrightarrow x \in A - B$$

أي أن $(A \cup B) - B \subset A - B$

وبالتالي نحصل على (i) .

(ii) , (iii) نترك إثباتهما بالمثل.

مثال (٣)

اثبت أن $A \cap (B-C) \subseteq A-(B \cap C)$

البرهان:

لتكن $x \in A \cap (B-C) \leftarrow x \in A$ and $x \in B-C$

وهنا يؤدي الى $x \in A$ and $x \notin C \leftarrow x \notin B \cap C$

اي ان $x \in A-(B \cap C)$ كما هو مطلوب.

مثال (٤)

اثبت أن $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

البرهان

نثبت اولا ان $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A \cap (B \cup C) \rightarrow x \in A$ and $x \in B \cup C$

$\rightarrow x \in B$ or $x \in C$

$\rightarrow x \in A \cap B$ or $x \in A \cap C$

$\rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ثم نثبت ان

$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \rightarrow x \in A \cap B$ or $x \in A \cap C$

$\rightarrow x \in A$ and $x \in B$ or $x \in C$

$\rightarrow x \in A$ and $x \in B \cup C$

$\rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$.

مثال (٤) [illegible]

اثبت أن $B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} (B-A_i)$

البرهان.

نثبت اولا ان $B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (B-A_i)$

$x \in (B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i) \rightarrow x \in B$ and $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$\rightarrow x \in B$ and $x \notin A_i$ ($\forall i$ لكل i وكتب)

$\rightarrow x \in B-A_i \quad \forall i$, $x \in \bigcap_{i=1}^{n} (B-A_i)$

لإثبات أنه $\bigcap_{i=1}^{n}(B-A_i) \subseteq B-\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ نقرأ الخطوات بالعكس بالترتيب العكسي.

تمارين:

(١) إذا كانت $\mathcal{U}=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ ، $R=\{a,b,c,d\}$ ، $S=\{c,d,e,f\}$ ، $T=\{a,b,g\}$ أوجد

R^c ، S^c ، T^c ، $R-S$ ، $S-R$ ، $R\cap S$ ،

$S\cup T$ ، $S\cap T$ ، R^c-T ، $R^c\cap T^c$.

(٢) اذكر عناصر كل من المجموعات التالية

(i) $A=\{x\ ,\ x^2+5x+6=0\}$

(ii) $B=\{x$ ، x عدد أولي أصغر من $27\}$

(iii) $C=\{x$ ؛ x أحد حروف "نهر النيل" $\}$

لاحظ أنه

$x\notin A\cup B \longleftarrow x\notin A$ and $x\notin B$

$x\notin A\cap B \longleftarrow x\notin A$ أو $x\notin B$

$x\notin A-B \longleftarrow x\in A$ و $x\notin B$

$x\notin \bigcup_{i=1}^{n}A_i \longleftarrow x$ لا تنتمي إلى أي A_i

$x\notin \bigcap_{i=1}^{n}A_i \longleftarrow x$ لا تنتمي لأكثر من مجموعة A_i .

$x\in A\cap B \longleftarrow x\in A$ و $x\in B$

$x\in A\cup B \longleftarrow x\in A$ أو $x\in B$

$x\in A-B \longleftarrow x\in A$ و $x\notin B$

$x\in \bigcup_{i=1}^{n}A_i \longleftarrow x$ تنتمي إلى أحد A_i على الأقل

$x\in \bigcap_{i=1}^{n}A_i \longleftarrow x$ تنتمي لكل A_i

تمرين هام:

(i) $(A-B)\cap(C-D)\subseteq(A\cap C)-(B\cap D)$

(ii) $(A\cup B)-C\subseteq A\cup(B-C)$

(iii) $(A\cup B)-(C\cup D)\subseteq(A-C)\cup(B-D)$

(iv) $A-(B\cup C)=(A-B)-C$

(v) $(A\cap B)-(A\cap C)=A\cap(B-C)$

(vi) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

(vii) $B-\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{n}(B-A_i)$

(viii) إذا $A-B=A-C$ فإن $B=C$ ؟ علل إجابتك.

الأعداد الحقيقية

سوف ندرس في هذا الجزء الخواص الأساسية للأعداد الحقيقية والتي سوف نبدأ باعتبار فئة ما نرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$ ونسمي فئة الأعداد الحقيقية ونعرف مسبقاً أنه توجد عمليتان معرفتان على هذه الفئة وهما عملية الجمع والضرب تحققان الخواص التالية:

(١) لكل عنصرين a، b من عناصر الفئة $\mathbb{R}$ يوجد عنصر ثالث $a+b$ في الفئة $\mathbb{R}$ يسمى مجموع هذين العنصرين.

(ب) لكل عنصرين a، b من عناصر $\mathbb{R}$ فإن

$a+b = b+a$ commutative (خاصية الإبدال)

(٢) إذا كانت a، b، c عناصر في $\mathbb{R}$ فإن

$a+(b+c) = (a+b)+c$ associative (خاصية الدمج)

(٤) يوجد عدد حقيقي يسمى الصفر ويرمز له بالرمز 0 يحقق الخاصية التالية

$a+0 = 0+a = a$

لكل عنصر a من عناصر الفئة $\mathbb{R}$.

(٥) لكل عنصر $a \in \mathbb{R}$ يوجد عنصر آخر $x \in \mathbb{R}$ يحقق الخاصية

$x+a = a+x = 0$

ويسمى x معكوس العدد a وسوف نرمز له بالرمز $(-a)$.

وبالتالي فإن الفرق بين a، b عرف بالتعريف كالآتي $a+(-b)$ والعملية المعرفة بهذه الطريقة تسمى عملية الطرح.

النتيجة (أ) إذا كان $a, b \in \mathbb{R}$ فيوجد للمعادلة $a+y = b$ حل وحيد $y = b-a$.

نتيجة (ب) إذا كانت $a \in \mathbb{R}$ فإن

$-0 = 0$ ، $-(-a) = a$.

نتيجة (ج) لجميع العناصر a، b، c، d من عناصر $\mathbb{R}$ فإن

$[a+d = b+c]$ إذا وفقط إذا $[b-a = d-c]$

multiplication = accumulation of intervals x time

(٦) لكل عنصرين $a,b \in \mathbb{R}$ يوجد عنصر ثالث $a.b$ يسمى حاصل ضرب a,b.

(٧) لجميع العناصر a,b,c التي $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ فإن

$$(a.b).c = a.(b.c)$$ (قانون الدمج)

(٨) يوجد في $\mathbb{R}^*$ عنصر 1 يسمى الوحدة تحقق الخاصية التالية

The accumulation of no interval

$$a.1 = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

(٩) لكل عنصر $a \in \mathbb{R}^*$ يوجد عنصر $x \in \mathbb{R}^*$ تحقق العلاقة

$$a.x = 1$$

represent that there isn't still any interval accumulated

يسمى x المعكوس الضربي للعدد a ويرمز له بالرمز a^{-1}.

(١٠) إذا كان $a,b \in \mathbb{R}^*$ فإن

$$a.b = b.a$$ (قانون الإبدال)

(١١) يوجد قانون يعرف بقانون التوزيع:

لكل $a,b,c \in \mathbb{R}$ فإن

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

the accumulation of no intervals for x times

من القواعد السابقة نحصل على:

(أ) $a.b = 0$ إذا وفقط إذا كان a أو b هو الصفر 0.

$1/a^{-1} = a^{-1x-1} = a$ (ب) $1/(1/a) = a$ لكل $a \neq 0$ فإن

(ج) لكل العناصر $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$ فإن $b^{-1}a = a/b$ حيث

$$[a.d = b.c] \longleftrightarrow [b/a = d/c]$$

(د) لجميع العناصر $a \in \mathbb{R}$

$$-a = (-1)\,a$$

(هـ) من (د) نجد أن $(-1)(-1) = 1$

(و) لكل $a,b \in \mathbb{R}$ فإن

$$-(a.b) = (-a).b = a.(-b)$$

الخواص السابقة من ١ — ١١ لتعرف ما يسمى بحقل الأعداد Field of Numbers

حيث نستطيع أن نقدر نجمع أعداد نقدر نعرف "ما خاصية الترتيب للأعداد الحقيقية".

توجد علاقة بين عناصر $\mathbb{R}$ نرمز لها بالرمز $<$ بحيث أنه

(١) بين أى عددين حقيقيين a ، b توجد فقط واحدة من العلاقات الآتية:

$$[a<b] \leftrightarrow [b-a>0]$$

$$a<b \quad , \quad a=b \quad , \quad b<a$$

٢) إذا كانت $a<b$ ، $b<c$ فإن $a<c$

٣) إذا كانت $a<b$ فإن $a+c<b+c$ لكل عدد حقيقى c

٤) إذا كانت $a<b$ فإن $ac<bc$ لكل عدد حقيقى $c>0$

إذا كان العدد $a>0$ سمى موجب وإذا كان $a<0$ سمى

القيمة المطلقة للأعداد الحقيقية

إذا كانت $a \in \mathbb{R}$ فإننا نُعرف

$$|a| = \begin{cases} a & \text{عندما } a \geq 0 \\ -a & \text{عندما } a<0 \end{cases}$$

numerical/absolute value = modulus

وتسمى $|a|$ بالقيمة المطلقة للعدد a. ويتضح من التعريف أن $|a| \geq 0$ ، وأنه إذا كانت $|a|=0$ فإن $a=0$

وأيضاً $|-a| = |a|$ ، $a \leq |a|$

Prove that: $a-b=x$, $b-a=-x$

From (1): $-a+b=-x$, $\therefore b-a=-x$

means either $-ve=a<|a|$ or $a=|a|=+ve$

إذا كانت a ، b من عناصر $\mathbb{R}$ فإن

$$|a-b| = |b-a|$$

with equality when $a=-ve$: $|a| \geq -a$ ، $|a| \geq a$ with equality when $a=+ve$

نظرية (١): لكل عدد $a \in \mathbb{R}$.

البرهان: إذا كانت $a \geq 0$ فمن التعريف $|a|=a$ وبالتالى $0 \leq -a$ أى

we didn't say $a \leq 0$

$$|a| = a \geq 0 \geq -a$$

أما إذا كانت $a<0$ فينتج $|a|=-a$ ويحصل على

$$|a| = -a \geq 0 > a$$

(+ve)

وتكون النظرية صحيحة فى جميع الحالات.

نظرية (١):

$|x+y| \leq |x|+|y|$

$|x-y| \geq |x|-|y|$

للأعداد الحقيقية a, b فإن $|a|+|b| \geq |a+b|$

البرهان:

(i) $|a| \geq a \ , \ |b| \geq b \longrightarrow |a|+|b| \geq a+b$

(ii) $|a| \geq -a \ , \ |b| \geq -b \longrightarrow |a|+|b| \geq -a-b$

من التعريف $|x+y|$ تساوي إما $x+y$ أو $-(x+y)$ في جميع الحالات

$$|a+b| \leq |a|+|b| \ .$$

نظرية (٢):

إذا كانت a عدد حقيقي موجب فإن $|x| < a$ إذا وفقط إذا كانت $-a < x < a$.

$$[\,|x| < a\,] \longleftrightarrow [\,-a < x < a\,]$$

البرهان: (I) إذا كانت $|x| < a$ ، $a > 0$ فإن $-a < x < a$.

من نظرية (٤) $|x| \geq x$ ، $|x| \geq -x$ فنحصل على $x < a$ ، $-x < a$. بضرب المتباينة الأخيرة في (-1) نحصل على $-a < x$ ، وبذلك نكون

$$-a < x < a \ .$$

(II) إذا كانت $-a < x < a$ ، $a > 0$ فإن $|x| < a$.

إذا كانت $x \geq 0$ فإن $x < a$ أو $|x| = x$. أما إذا كانت $x < 0$ فإن $-x < a$ أو $|x| = -x$. لكن $-a < x$ يكافئ $a > -x$. إذا $|x| < a$.

as in the R.H.S of inequality (I)

الفترات "Intervals"

إذا كانت a, b أعداداً حقيقية وكانت $a \leq b$ فإن

(١) الفترة المغلقة

$$[a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \ , \ a \leq x \leq b \,\}$$

(c) الفترة المفتوحة

$$(a,b) = \{ x \in \mathbb{R},\ a < x < b \}$$

توجد أيضا فترات نصف مغلقة أو نصف مفتوحة

$$[a,b) = \{ x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b \} \quad ,$$
$$(a,b] = \{ x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b \}$$

في جميع الحالات السابقة فإن $b-a$ تسمى طول الفترة

it was mentioned that $a \leq b$

الفترة التي طولها 2ε حول العدد $a \in \mathbb{R}$ هي فئة الأعداد التي تبعدها عن a مسافة تقل عن ε ويرمز لها بالرمز

$$U_\varepsilon(a) = \{ x ;\ |x-a| < \varepsilon \}.$$

تسمى بالجوار أو فئة الجوار للعدد a.

من النظريات السابقة نجد أن

$$[x \in U_\varepsilon(a)] \longleftrightarrow [a-\varepsilon < x < a+\varepsilon]$$

من تكون ورا سنا للأعداد الحقيقية حاولنا نضعف شرط الحد الأعلى لأي فئة.

إذا كانت S أي فئة جزئية غير خالية من الأعداد الحقيقية وكان $b \in \mathbb{R}$. فيقال أن b حد أعلى للفئة S إذا كان $x \leq b$ لكل $x \in S$.

الفئة S في هذه الحالة تسمى محدودة من أعلى بالعدد b

فإذا كان $c \in \mathbb{R}$ وكان (i) c حد أعلى للفئة S

(ii) $c < b$ لأي حد أعلى b للفئة S (i)

تسمى c في هذه الحالة أقل حد علوي للفئة S ويرمز له

$$c = \sup S$$

Least upper bound = supremum (sup)

& greatest lower b. = infimum (inf)

آخر خواصية لمجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هو ما يعرف بـ
خاصية الحد العلوي أو خاصية التمام "Completeness" :

إذا كانت S أي مجموعة جزئية غير خالية من الأعداد الحقيقية وكانت محدودة من أعلى، فإنه يوجد له أقل حد علوي c في المجموعة $\mathbb{R}$.

ولوصف الأعداد الحقيقية بأنها الحقل المرتب التام
"complete ordered field".

مثال :

المجموعة $S=\{x : x=\frac{n}{n+1}\}$ ، n عدد صحيح.
هذه المجموعة تتكون من عدد غير محدود من العناصر على الصورة

$1/2, 2/3, 3/4, \ldots$

وأحد الحدود العلوية $1, 2, 3, \ldots$

ويلاحظ أنه أقل حد علوي هو $1 \notin S$.

تمارين

١) أوجد قيم x التي تحقق المتباينات الآتية

(i) $|x+4|<2$, $|4-5x|\leq 6$

(ii) $|3x-2|<7$, $|x+1|<|x|$

(iii) $|3x-2|>5$, $|4x+2|\geq 4$

٢) أثبت أن

(i) $|xy| = |x|\cdot|y|$

(ii) $|x/y| = |x|/|y|$

(iii) $|x| = |-x|$

(iv) $|x-y| + |y-z| \geq |x-z|$

(v) $|x| + |y| \geq |x-y|$

(vi) $|x| - |y| \leq |x-y|$

٣) أوجد لكل من الحدود العلوية الصغرى الآتية

a) $S=\{2, 7, -3, 0, 8\}$

b) $S = \{ x ;\ x = n^2 + 2 ,\ n < 4 ,\ n \in N \}$.

c) $S = \{ x ;\ x^2 < 9/4 \}$.

(٤) اذا كانت a, b اعداداً حقيقية. اثبت انه اذا كانت $0 \le a - b < \varepsilon$ لكل عدد حقيقي موجب ε فإن $a = b$.

(٥) اذا كانت $S = \{ x ;\ x = (3n+2)/n \}$ حيث n عدد صحيح موجب. فاثبت ان $\sup S = 5$

(2-V) $|x| \ge x$, $|x| \ge -x$ $\Rightarrow$ $x \le |x|$, $-x \le |x|$

$-|x| \le x + |y| \le |x| + |y|$ $\Leftarrow$ $-|x| \le x \le |x|$, $-|y| \le y \le |y|$

(2-VI) $|x| = |(x-y)+y| \le |x-y| + |y|$ $\Rightarrow$ $|x| - |y| \le |x-y|$

$|x-y| \ge |x| - |y|$, $|x-y| \ge |y| - |x|$ $\Rightarrow$ $|x-y| \ge \big| |x| - |y| \big|$ R.T.P

to prove that $|x| - |y| \le |x+y| \le |x| + |y|$

$|x+y| = |(x+y) + (-y)| \le |x+y| + |-y|$ since $|-y| = |y|$

$|x| - |y| \le |x+y|$

$|x| + |y| \ge |x-y| = |(x-y) + y| \le |x-y| + |y|$

$|x| + |y| \ge |x-y|$

this is a case is the function denoted by f ; g ; h ; ...

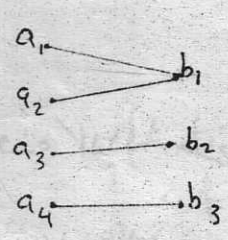
الفصل الثاني : "الدوال"

لنفرض أنه لدينا فئة X ، ولكل عنصر $x \in X$ فإنه بواسطة قاعدة ما (سنرمز لها بالرمز f) يتحدد عنصر وحيد y (سنرمز له بالرمز $f(x)$) ينتمي لفئة أخرى Y. هذه القاعدة تسمى دالة

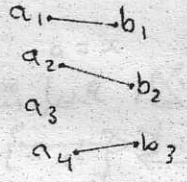
أي أن الدالة : هي الفئة X إلى الفئة Y هي علاقة تعين لكل عنصر من عناصر X عنصر وحيد من عناصر Y.

نستخدم الحروف f ، g ، h ، ... للدلالة على الدوال و نعبر عن المرموز الذي يقوم بالشكل الآتي $f: X \longrightarrow Y$ (ونقرأ f دالة من الفئة X إلى الفئة Y).

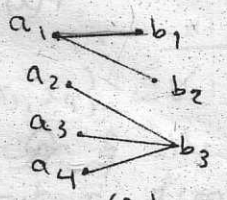
مثال : إذا كانت X هي فئة العناصر $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ، Y هي فئة العناصر $\{b_1, b_2, b_3\}$ فإن



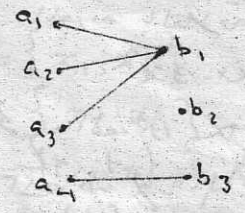
(1)



(2)



(3)



(4)

العلاقات الموضحة بالرسوم السابقة تعرف دالة فقط في حالتي (1) و (2) ؛ في حالة (3) لا تعتبر دالة لأن العنصر a_1 يناظر b_1 و b_2 معاً)

D = domain
R = range

تسمى الفئة X نطاق الدالة f ، وتستخدم الرمز D(f) لها
وتسمى الفئة Y النطاق المقابل.

أما مدى الدالة f ويرمز له بالرمز R(f) فهو فئة جزئية من Y بحيث أن

$$R(f) = \{ y ; y \in Y ; y = f(x) , x \in X \}.$$

مثال ١ : الدالة f التي تعين لكل عدد $a \in \mathbb{R}$ نفس العدد a وتكتب

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(a) = a$$

لما نطاق التعريف $\mathbb{R}$ والنطاق المقابل هو $\mathbb{R}$ أيضا أي أن

$$D(f) = \mathbb{R}, \quad R(f) = \mathbb{R}.$$

مثال ٢ : الدالة f المعرفة بالعلاقة

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

فإن الدالة معرفة على فئة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

$$f = \mathbb{R} \longrightarrow \{1, 2\}$$

النطاق في هذه الحالة هو $D(f) = \mathbb{R}$ ، والمدى $R(f) = \{1, 2\}$.

مثال ٣ : الدالة f المعرفة بالعلاقة

$$y = f(x) = 18x - 3x^2$$

فإن الدالة معرفة لجميع القيم x حيث x عدد حقيقي أي $D(f) = \mathbb{R}$
ولذلك فإن النطاق المقابل لهذه الدالة هو $\mathbb{R}$ لأن $18x - 3x^2$ عدد حقيقي لكل x عدد حقيقي.

يسمى الدالة (graph) فئة الأزواج المرتبة $(x, f(x))$ حيث $x \in X$ ، $f(x) \in Y$

يمكن تمثيل دالة ما بيانيا في المستوى باعتبار محورين متعامدين
ثم نمثل أحد المحورين الفئة X ، ونمثل المحور الآخر الفئة Y.
وباعتبار النقط $(x, f(x))$ نحصل على الشكل البياني للدالة.

$f: X \Rightarrow Y$ (origin ⇒ image)
$f^{-1}: Y \Rightarrow X$ (origin ⇒ image)
$f^{-1}(B) = A$
$\forall x \in X \; . \; f(x) = y \Leftrightarrow (x, f(x))$
$\forall y \in Y \; . \; f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow (y, f^{-1}(y))$

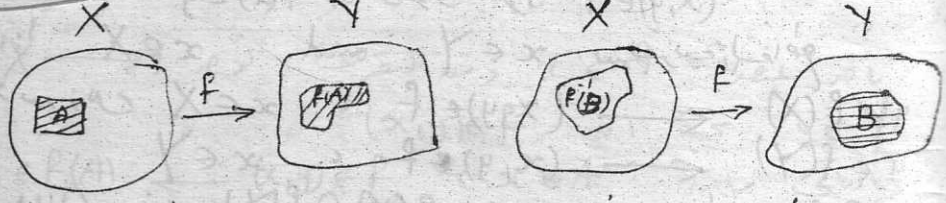
الصور والصور العكسية:

إذا كانت $f: X \longrightarrow Y$ (I.Vari.) (d.Vari.)
وكانت $A \subseteq X$ فإننا نعرف

$$f(A) = \{ y ; f(x) = y , x \in A \},$$

ونسمي $f(A)$ صورة الفئة A في الفئة Y.

$f^{-1}: Y \Rightarrow X$ (I.Vari.) (d.Vari.)



أما إذا كانت B فئة جزئية من Y أي $B \subseteq Y$ فإننا نعرف

$$f^{-1}(B) = \{ x ; f(x) = y , y \in B \}.$$

ونسمي الصورة العكسية للفئة B.

مثال (1)

إذا كانت $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ، $Y = \{t_1, t_2, t_3\}$
وعرفنا دالة f بحيث $f: X \longrightarrow Y$
$f(x_1) = t_1 , \; f(x_2) = t_1 , \; f(x_3) = t_1 , \; f(x_4) = t_3$
فإننا نحصل على الآتي

(i) If $A = \{x_1, x_2\}$, then $f(A) = \{t_1\}$
(ii) $A = \{x_3, x_4\}$, " $f(A) = \{t_1, t_3\}$
(iii) If $B = \{t_1, t_2\}$, then $f^{-1}(B) = \{x_1, x_2, x_3\}$
(iv) $B = \{t_1\}$, " $f^{-1}(B) = \{x_1, x_2, x_3\}$
(v) $B = Y$, " $f^{-1}(B) = X$
(vi) $B = \{t_2\}$, " $f^{-1}(B) = \phi$.

وبالتالي لا يمكننا النظر إلى f^{-1} على أنها دالة ويجب توفر شروط.

theorem: X and Y two sets, and (f) is a function defined for every x ∈ X thus

$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

بعض النظريات الاساسية للدوال:

نظرية (1): اذا كانت X، Y مجموعتان وكانت f دالة معرفة على $X \cap Y$ فإن

$$f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$$

البرهان:

- لنأخذ $y \in f(X \cap Y)$ حيث أن هذا العنصر يوجد على الأقل $x \in X \cap Y$ بحيث أن $f(x) = y$ أي يوجد $(x,y) \in f$
- إذا $x \in X$ and $x \in Y$ أي العنصر ينتمي للتقاطع
- وهذا يعني $(x,y) \in f$ ، $x \in X$ $\longrightarrow$ $y \in f(X)$
- $(x,y) \in f$ ، $x \in Y$ $\longrightarrow$ $y \in f(Y)$
- وبالتالي فإن $y \in f(X) \cap f(Y)$ وهو المطلوب إثباته.

مثال: لتكن $X = \{s_1, s_2, s_3\}$ ، $Y = \{t_1, t_2\}$
ولتكن الدالة f من X إلى Y المعرفة كما يلي: $f: X \longrightarrow Y$

$$f(s_1) = t_1, \quad f(s_2) = t_2, \quad f(s_3) = t_1$$

ولتكن $A = \{s_1, s_2\}$, $B = \{s_2, s_3\}$ في X، فيتضح مما سبق أن

$$f(A \cap B) = \{f(s_2)\} = \{t_2\},$$

بينما

$$f(A) \cap f(B) = \{t_1, t_2\}$$

وبذلك برهنا على أن $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$،

نظرية (2): إذا كانت D، E مجموعتان جزئيتان من Y

$$f^{-1}(D) \cup f^{-1}(E) = f^{-1}(D \cup E).$$

حيث $f: X \longrightarrow Y$

البرهان: نثبت أولاً أن $f^{-1}(D) \cup f^{-1}(E) \subset f^{-1}(D \cup E)$

لتكن $x \in f^{-1}(D) \cup f^{-1}(E)$، عندئذ يتحقق أحد الشرطين

$x \in f^{-1}(D)$ أو $x \in f^{-1}(E)$،

أي لو $[y \in E, (x,y) \in f]$ فإن $[(x,y) \in f, y \in D]$

فلو $(x,y) \in f$ ، $y \in D \cup E$

وهذا يعني $x \in f^{-1}(D \cup E)$ ، وهذا المطلوب إثباته

$$f^{-1}(D) \cup f^{-1}(E) \subseteq f^{-1}(D \cup E)$$

نظرية (٢): لكل مجموعة $A \subset X$ فإن

$$A \subset f^{-1}[f(A)]$$

البرهان:

نأخذ عنصراً $x \in A$ ومن التعريف لو $f: X \longrightarrow Y$

$y \in Y$ بحيث أن $(x,y) \in f$

وبالتالي فإن $(x,y) \in f$ ، $x \in A \longrightarrow y \in f(A)$

وأيضاً $(x,y) \in f$ ، $y \in f(A) \longrightarrow x \in f^{-1}[f(A)]$

أي أننا وصلنا إلى

$$A \subset f^{-1}[f(A)]$$

مثال: لنعتبر المجموعات $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ، $T = \{b_1, b_2, b_3\}$

ولتكن $f: S \longrightarrow T$ معرفة كالآتي

$f(a_1) = b_1$ ، $f(a_2) = b_1$ ، $f(a_3) = b_1$ and $f(a_4) = b_3$

ولتكن $A = \{a_1, a_2\}$.

إذا حصلنا على $f(A) = \{b_1\}$ مجموعة

$$f^{-1}[f(A)] = f^{-1}(\{b_1\}) = \{a_1, a_2, a_3\} \neq A$$

(set) (element) (set)

وبذلك أثبتنا أن $A \neq f^{-1}[f(A)]$.

سوف نقوم بدراسة بعض الدوال التي نطاقها تعريف والمقاد فيها $\mathbb{R}$

الدوال المحدودة

الدالة f تسمى محدودة إذا كان نطاق التعريف محدوداً أي

أنه يوجد عدد حقيقي M بحيث أنه لكل $x \in D(f)$ فإن

$$|f(x)| \leq M$$

Sup and Inf

thus $f(x)$ can be made between m_1 and M_1

تسمى الدالة محدودة من أعلى إذا وجد M_1 بحيث أن

$$\forall x \ , \ x \in D(f) \longrightarrow f(x) < M_1 \ .$$

تسمى الدالة محدودة من أسفل إذا وجد عدد m بحيث

$$\forall x \ , \ x \in D(f) \longrightarrow f(x) > m$$

وعلى ذلك نقول أن الدالة f محدودة إذا وجد m, M بحيث

$$\forall x \ , \ x \in D(f) \ , \ m < f(x) < M \ .$$

الدوال متزايدة التزايد (متزايدة التناقص)

تسمى الدالة متزايدة التزايد في فترة ما، إذا كان لأي نقطتين x_1, x_2 في الفترة بحيث $x_1 > x_2$ فإن $f(x_1) \geq f(x_2)$

أما إذا كانت $f(x_1) > f(x_2)$ حيث الدالة متزايدة بقوة (strictely increasing).

أما إذا كانت $f(x_2) \geq f(x_1)$ حيث الدالة متناقصة، متناقصة بقوة إذا كانت $f(x_2) > f(x_1)$.

الدوال العكسية والقيم لا سيما

إذا كانت $(x,y) \in f$ فمعنى ذلك أن $y = f(x)$ ويمكننا التفكير في العلاقة بصورة مختلفة وكتابة ذلك على صورة عكسية $x = f^{-1}(y)$ وتسمى الصورة العكسية للعنصر y فإذا كانت $f(x)$ دمية الفيه فإن $f^{-1}(y)$ ربما تكون كبيرة القيم التي عكسها اعتبرها مجموعة من دوال دميته الفيه y كافة فرع ونختار أحد هذه الفروع ونطلق عليه القيم لا سيما الدالة $f^{-1}(y)$ وتسمى الدالة العكسية

تعريف: إذا كانت f دالة والفيه فإننا نعرف مجموع دمية الفيه وكذلك الفرق وخارج قسمة الدالة بالتعريف التالي.

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, $D(f \pm g) = D(f) \cap D(g)$,

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$.

$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $D(\frac{f}{g}) = [D(f) \cap D(g) - \{x, g(x) = 0\}]$ minus

$f(x) = y$ و $g(y) = z$
$\Rightarrow g(f(x)) = z = h(x)$

تعريف :

إذا كانت $f: X \longrightarrow Y$ ، $g: Y \longrightarrow Z$ والعبيه جابه
محصل دائبه الدالتين h ، h دالة من $h: X \longrightarrow Z$
معرفه بالطريقة الآتية

$h(x) = g[f(x)]$, $D(h) = \{x / x \in D(f), f(x) \in D(g)\}$

أحيانا نسمى h الدالة المركبة $h = gof$

مثال :

إذا كانت $f: A \longrightarrow B$ معرفه بالشكل $f(x,y) = x^2 + y^2$ ،
وكانت $g: B \longrightarrow C$ بحيث $g(x) = 3\sqrt{x}$.
فالمطلوب محصل دائبه الدالتين كالآتى $gf: A \longrightarrow C$

$\therefore gf(x,y) = g[f(x,y)] = g[x^2 + y^2] = 3\sqrt{x^2+y^2}$.

نظرية (hw) : إذا كانت $f: A \longrightarrow B$ ، $g: B \longrightarrow C$ والعبيه وكانت $D \subset C$
فإن

$$[gf]^{-1}(D) = f^{-1}[g^{-1}(D)].$$

البرهان : نثبت أولا أن

$$[gf]^{-1}(D) \subset f^{-1}[g^{-1}(D)]$$

بأخذ $x \in [gf]^{-1}(D)$ يوجد عنصر $z \in D$ بحيث أن $(x,z) \in gf$
ومن التعريف يوجد عنصر $y \in B$ بحيث أن $(x,y) \in f$ ، $(y,z) \in g$
ومن أول عنصر أن $y \in g^{-1}(D)$ وبالتالى فإن $f(x) \in g^{-1}(D)$ وهذا
أى أن $x \in f^{-1}[g^{-1}(D)]$

$$[gf]^{-1}(D) \subset f^{-1}[g^{-1}(D)]$$

لإثبات الجزء الآخر نفرض خطوات عكسية ويترك كتمرين .

تمارين

١) إذا كانت $S=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$ ، $T=\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$ وعرفنا الدالة:
$f: S \longrightarrow T$ حيث $f=\{(s_1,t_1),(s_2,t_1),(s_3,t_2),(s_4,t_4)\}$
فأوجد صور الفئات الجزئية التالية

a. $\{s_1,s_3\}$, b. $\{s_1,s_2\}$, c. $\{s_1,s_2,s_4\}$

وأوجد الصور العكسية للفئات

d. $\{t_1\}$, e. $\{t_1,t_2,t_4\}$, f. $\{t_3\}$.

٢) إذا أعطيت الدالة: $f(x)=x^2-4x+4$ على فئة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
ارسم f ثم أوجد صور الفترات الجزئية

a. $[0,1]$, b. $(0,3)$ و c. $[3,4)$

أوجد أيضا الصور العكسية للفترات

d. $[0,1]$, e. $(1,2)$ f. $[-1,0)$.

٣) إذا كانت $f: S \longrightarrow T$ دالة وكانت A ، B فئات جزئية من S
و D ، E فئات جزئية من T فأثبت الآتي:

(i) If $A \subset B$, then $f(A) \subset f(B)$.
(ii) If $D \subset E$, then $f^{-1}(D) \subset f^{-1}(E)$.
(iii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ بين أن
(iv) $f^{-1}(D) \cap f^{-1}(E) = f^{-1}(D \cap E)$
(v) $f[f^{-1}(D)] \subset D$.
(vi) $f(A) - f(B) \subset f(A-B)$.
(vii) $f^{-1}(D) - f^{-1}(E) = f^{-1}(D-E)$.

٤) إذا كانت A ، B ، C فئات لأعداد صحيحة، وعرفنا
$f: A \longrightarrow B$ ، $g: B \longrightarrow C$ بواسطة العلاقات $f(x)=3x^2+2x$ ، $g(x)=x-1$
أوجد $gf(x)$ ، $fg(x)$.

٥) إذا كانت A فئة الأعداد الحقيقية وكانت B ، C فئات لأعداد موجبة وعرفنا
$f: A \longrightarrow B$ ، $g: B \longrightarrow C$ بالعلاقات $f(x)=1/(2-x)$ ،
أوجد $gf(x)$ ، $fg(x)$ وأيضا أوجد $g(x)=1/(1+x)$

أنواع الدوال :

- دالة كثيرة الحدود على صورة

(١) $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$

حيث $a_n, \dots, a_0$ ثوابت ، n عدد صحيح موجب يسمى درجة كثيرة الحدود إذا كانت $a_0 \neq 0$.

والنظرية الأساسية في الجبر تقرر أنه كل دالة كثيرة الحدود $f(x)=0$ لها على الأقل جذر واحد . ومن هذا يمكننا أن نقول إذا كانت n هي درجة الدالة فإنها الدالة لها n من الجذور .

- الدوال الجبرية

لتكن دوال $y=f(x)$ تحقق معادلة على الصورة

(٢) $P_0(x)\, y^n + P_1(x)\, y^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x)\, y + P_n(x) = 0$

حيث $P_n(x), \dots, P_0(x)$ كثيرة حدود في x

فإذا أعطينا التعبير عن y كدالة في صورة $P(x)/Q(x)$ حيث $P(x)$ ، $Q(x)$ كثيرا حدود فإن تسمى دالة جبرية ، وفي غير هذه الحالة فهي دالة غير جبرية .

- الدوال الغير جبرية : هي كل دالة لا تحقق كتابتها على الصورة (٢).

أ- الدالة الأسية : $f(x) = a^x$, $a \neq 0, 1$

ب- الدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_a x$, $a \neq 0, 1$ وهي عكس دالة الأسية . في حالة $a = e$ فإننا نكتب $f(x) = \log_e x = \ln x$.

جـ- الدوال المثلثية : مثل $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ ، ...

د- الدوال المثلثية العكسية وتسمى أيضا :

$y = \sin^{-1} x$, $(-\pi/2 < y \leq \pi/2)$

$y = \cos^{-1} x$, $(0 \leq y \leq \pi)$

$y = \tan^{-1} x$, $(-\pi/2 < y < \pi/2)$

هـ- الدوال الزائدية

يمكننا تعريف الدوال الزائدية بدلالة الدالة الأسية e^x:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad ,$$

و- الدوال الزائدية العكسية

إذا كان $x = \sinh y$ فإن $y = \sinh^{-1} x$ هي القيمة العكسية لـ x. ويمكننا استخدام اللوغاريتمات للتعبير عن هذه الدوال

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad , \quad \forall x$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad , \quad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad , \quad |x| < 1$$

سوف ندرس كل على حدة هذه الدوال على ضوء نظرية التعريف والنهايات والاتصال ثم إيجاد المشتقة فيما يأتي من فصول.

يلاحظ أن العدد التقريبي للعدد $e = 2.71828\ldots$

---

(1) $f(x) \to l$ as $x \to \xi$. Suppose that f is defined on an interval (a,b) except possibly for some point $\xi \in (a,b)$. We say that $f(x)$ tends (or converges) to a limit l as x tends to ξ and write (1) or, alternatively $\lim_{x \to \xi} f(x) = l$ if the following criterion is satisfied. Given any $\varepsilon > 0$, we can find a $\delta > 0$ such that $|f(x) - l| < \varepsilon$ provided that $0 < |x - \xi| < \delta$.

الفصل الثالث "الدوال المتصلة والنهايات"

نهايات الدوال :

نقول أن الدالة f المعرفة على $[a,b]$ تؤول إلى النهاية A عند النقطة $x_0 \in (a,b)$ إذا كان لكل عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث أن لجميع الأعداد $x \in (a,b)$ التي تحقق الشرط $0 < |x - x_0| < \delta$ فإن $|f(x) - A| < \varepsilon$ وذلك ذلك رمزياً بالصورة

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \; , \; \forall x \; ; \; 0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad (1)$$

أو نعبر عنه ذلك باستخدام مجاور العنصر x_0 ونعرفه $U_\delta(x_0)$ بالصورة

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta : \forall x \in U_\delta(x_0) - \{x_0\} \longrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \quad (2)$$

ويرمز لذلك بالرمز $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$.

مثال (1) : أوجد $\lim_{x \to 1} (5x - 3)$ وأثبت أنه محققة على صحيح.

الحل : بوضع $f(x) = 5x - 3$ ، $x_0 = 1$. نحاول بالحدس لقيم لمرور $f(x)$ عندما $x_0 = 1$ وبالتالي A . أي نحاول أيجاد قيم

فإنه $A = 2$

نرجع للتعريف لإثبات صحة الذي فرضنا $A = 2$ ولأي $\varepsilon > 0$ فيجب أن تكون $|(5x - 3) - 2| < \varepsilon$ ومنه بالخطوات عكس العكس المطلقة نحصل على

$$2 + \varepsilon < 5x - 3 < 2 + \varepsilon$$

وبجمع 3 لجميع أطراف المتباينة

$$5 - \varepsilon < 5x < 5 + \varepsilon$$

أي أن

$$1 - \frac{\varepsilon}{5} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{5}$$

(open interval)

هذه المتباينة تمثل الفترة المفتوحة $\left(1 - \frac{\varepsilon}{5}, 1 + \frac{\varepsilon}{5}\right)$

وهي جوار النقطة $x_0 = 1$ وبذلك نحصل على

for $x \neq -1$ $\quad 0 < |x-1| < \frac{\varepsilon}{5}$

إذا $\quad 0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{5}$.

الحد مطلوب بعد التعريف .

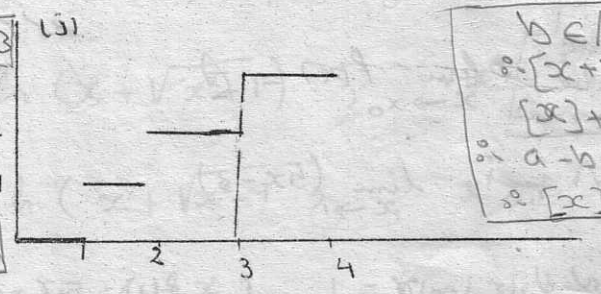
(أ)

مثال (ب) :

لتعتبر الدالة $f(t) = [t]$ إذا دالة العدد الصحيح في أي عدد t . وندرس نهاية هذه الدالة عند $t=3$.

نلاحظ في هذه الحالة أن المطلوب هو $\lim_{t \to 3} f(t)$

نلاحظ التعريف أنه $A=3$. ونلاحظ أيضاً أنه عند $t=3$ أو أكبر



Lim from R.H.S = 3
" " L.H.S = 2 3
Passing Point 3
i.e. $t \to 3$
⇒ there isn't a definite limit for the function

$b \in \mathbb{N}$
$\therefore [x+b] = a$
$[x] + b$
$\therefore a-b \leq x < a-b+1$
$\therefore [x] = a-b$

فلاحظ فإنه $f(t) = 3$. أما إذا كانت $t < 3$ فإن $f(t) = 2$

فإذا كانت h أي عدد موجب $0 < h < 1$ ، فإن

$[t] = 2$ إذا $3-h < t < 3$,

while $[t] = 3$ إذا $3 < t < 3+h$.

فإذا أخذنا $\varepsilon = 0.01$ فإننا لا نستطيع إيجاد جوار للنقطة $t=3$ بحيث

$t \in U(3) \leftarrow |[t] - 3| < \varepsilon$

وبالتالي فإن نهاية $f(t)$ عندما $t \to 3$ غير موجودة .

مثال (ج) : لتعتبر الدالة $f(x) = (2x^2 + x - 3)/(x-1)$

فإذا كان نطاق f هو $\mathbb{R} - \{1\}$ فإن $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$.

سنحاول الآن أن نجد العلاقة بين ε و δ بحيث أنه

$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$

first got $\mathbb{R} - \{1\} = D(f)$
from here said $0 < |x-1| < \delta$

سنحاول جاهدين الحصول على δ بدلالة ε .

سنفرض جدلاً أن $\delta = \varepsilon/2$

إذا كانت $x \neq 1$ فإن

$$f(x) = \frac{2x^2+x-3}{x-1} = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1} = 2x+3$$

صد لتعريف النهاية نجد أن

$$0 < |x-1| < \delta \longrightarrow |f(x)-5| = |2x+3-5|$$

$$= |2x-2| = 2|x-1| < 2\delta \quad \text{put } 2\delta = \varepsilon \Rightarrow$$

بوضع $\delta = \varepsilon/2$ نحصل على

$$0 < |x-1| < \delta \longrightarrow |f(x)-5| < \varepsilon$$

أي أن

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5 .$$

نظرية (١)

إذا كانت m, b أعداداً حقيقية وكانت $f(x) = mx+b$

فإن $\lim_{x \to a} f(x) = ma+b$.

neighbourhood of the function at x ... $f(x)$

البرهان:

نفرض أنه أعطيت $\varepsilon > 0$ وأنه نفرض $A = ma+b$.

سوف نثبت أنه يوجد مجاور للنقطة a بحيث أن

$$(ma+b)-\varepsilon < mx+b < (ma+b)+\varepsilon$$

حيث $x \in U(a)$. بطرح $ma+b$ من جميع أطراف المتباينة نحصل على

$$-\varepsilon < mx-ma < \varepsilon$$

$$|m(x-a)| < \varepsilon \quad \leftarrow \quad |m(x-a)| = |m||x-a|$$

وبالتالي فإن $m = 0$ أي $m > 0$ أي $m < 0$

(i) إذا كانت $m > 0$ فإن $|x-a| < \frac{\varepsilon}{m}$ أي $\delta = \frac{\varepsilon}{m}$

(ii) إذا كانت $m < 0$ فإن $|x-a| < \frac{\varepsilon}{|m|}$

(iii) إذا كانت $m = 0$ فإن $|0(x-a)| < \varepsilon$ لأي قيمة x

وبالتالي فإن العلاقة

$$|x-a| < \delta \longrightarrow |f(x)-(ma+b)| < \varepsilon$$

إذا كانت $m > 0$ و $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$ وعند $m = 0$ فإن أي عدد موجب

وبذلك نجد أن

$$\lim_{x\to 5}(3x-7) = 15-7 = 8$$

$$\lim_{x\to a}(x) = a$$

$$\lim_{x\to a} b = b.$$

نظرية (١)

إذا كانت الدالة $f(x) \neq 0$ نهاية فإن مقلوبها نهاية وعكسه.

مثال: أثبت أن $\lim_{x\to 3}(x^3-27)/(x-3) = 27$

البرهان: لأن

$$x^3-27 = (x-3)(x^2+3x+9)$$

فإن

$$f(x) = \frac{x^3-27}{x-3} = x^2+3x+9 \quad \text{if } x \neq 3$$

نحاول إيجاد δ من التعريف كالآتي في ε. أي أنه إذا

$$|f(x)-A| < \varepsilon$$

$$0 < |x-3| < \delta$$

فيجب الحصول على δ بحيث

$$|f(x)-A| = |x^2+3x+9-27| = |x^2+3x-18|$$

$$= |x-3||x+6| < \varepsilon$$

فإذا أخذنا المجاور N_0 المعرف بالعلاقة $0 < |x-3| < 1$.

suppose

وبالتالي إذا كانت $x \in N_0$ فإن $-1 < x-3 < 1$،

$8 < x+6 < 10$ ومنه $|x+6| < 10$ وهذا يؤدي إلى

$$|x-3||x+6| < 10|x-3| < \varepsilon$$

إذا

$$|x-3| < \frac{\varepsilon}{10}$$

أي أن $\delta \leq \frac{\varepsilon}{10}$.

(I) $4 > x$ و $2 < x$

$3 \neq x$

thus (I) is fulfilled

نظرية (٢)

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ ، $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$

فإن

(i) $\lim_{x\to a} k.f(x) = k.L_1$ حيث k مقدار ثابت

(ii) $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = L_1 + L_2$

(iii) $\lim_{x\to a} [f(x).g(x)] = L_1.L_2$

(iv) $\lim_{x\to a} [f(x)/g(x)] = L_1/L_2 \quad , \quad L_2 \neq 0$

(v) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$

حيث $\sqrt[n]{L_1}$ عدد حقيقي

البرهان :

(ii) لنفرض $\varepsilon > 0$. نختار أي عدد مجاور للنقطة a بحيث أن

$$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon \quad , \quad x \in \mathcal{U}(a)$$

* Perhaps means $x \in$ holed neighbourhood for (a)

نجد أن

$$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| = |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)|$$
$$\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2|$$

ولأن $f(x) \to L_1$ فوجد $N_1(a)$ بحيث

$$|f(x) - L_1| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad , \quad x \in N_1(a) \quad (*)$$

وأيضاً نجد $N_2(a)$ بحيث

$$|g(x) - L_2| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad , \quad x \in N_2(a) \quad (*)$$

فإذا كانت $N = N_1 \cap N_2$ فنجد أن

$$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2|$$
$$< \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \quad , \quad x \in$$

نظرية (٤)

إذا كانت $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

وكان $\lim_{x\to a} f(x) = L \quad , \quad \lim_{x\to a} h(x) = L$

فإن

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

مثال : اوجد نهاية $f(n)$ حيث $n \to \infty$ حيث

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{3+n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$$

من النظرية (٤) نجد أن

$$\text{Inf.} = \frac{n}{\sqrt{n+n^2}} \leq f(n) \leq \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = \text{Sup.}$$

بأخذ النهاية لما $n \to \infty$ نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 1.$$

مثال (٢) : اذا كانت f دالة معرفة بالطريقة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

فأثبت أن $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

يجب أن نثبت أنه لأي $\varepsilon > 0$ يمكننا إيجاد $\delta > 0$ (يعتمد على ε) بحيث $|x^2 - 4| < \varepsilon$ اذا كانت $0 < |x-2| < \delta$.

باختيار $\delta \leq 1$ بحيث أن $0 < |x-2| < 1$ أي أن $1 < x < 3$ أي $x \neq 2$

فإن

$$|x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2|\,|x+2| < \delta|x+2| < 5\delta$$

$$\varepsilon = 5\delta$$

$1+2 < x+2 < 3+2$
$3 < x+2 < 5$
$5 > \lvert x+2\rvert$

فاذا اخترنا $\delta = 1$ أي $\varepsilon/5$ أيهما أقل فإن

$$0 < |x-2| < \delta \longleftarrow |x^2 - 4| < \varepsilon .$$

وهو المطلوب اثباته.

④ Squaring all sides of the inequality

فمثلاً اذا اخترنا $\varepsilon = .05$ فإن $\delta = \varepsilon/5 = \frac{.05}{5} = .01$

وذلك لأنه اذا كانت $0 < |x-2| < .01$ فإن $1.99 < x < 2.01$

وذلك يكون $-.0399 < x^2 - 4 < .0401$ ،

أو $3.9601 < x^2 < 4.0401$ ، وهذا يعني أنه اذا اخترنا $\varepsilon = 6$ فإن $\delta = 1$ أو $\varepsilon = 5$ فإن $\delta = 1$ أيضاً

$\varepsilon = 5$

تحقق النهايات.

مثال (٤) أثبت أن $\lim_{x\to 1} \frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1} = -8$.

أي برهن أنه لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث أن

$0<|x-1|<\delta \longrightarrow \left|\frac{2x^4-6x^3+x^3+3}{x-1} - (-8)\right| < \varepsilon$.

عند $0<|x-1|<\delta$. فعند $x\neq 1$ فإن

$\frac{(2x^3-4x^2-3x-3)(x-1)}{x-1} = 2x^3-4x^2-3x-3$

وذلك بحذف $(x-1)$.

أي أنه لكل $\varepsilon>0$ يمكن إيجاد $\delta>0$ بحيث $|2x^3-4x^2-3x+5| < \varepsilon$

عند $0<|x-1|<\delta$. بافتراض $\delta \le 1$ فإن $x\neq 1$, $0<x<2$

$|2x^3-4x^2-3x+5| = |x-1||2x^2-2x-5|$

$< \delta\,|2x^2-2x-5|$ ← note the diffrence

$< \delta\,(|2x^2|+|2x|+5)$

$< \delta\,(8+4+5) = 17\delta$

إذا افترضنا $\delta \le 1$ أيضاً $\delta \le \varepsilon/17$ فيكون لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$.

إذا $0<\delta\le 1$ فإن $-1<x-1<1$, $0<x<2$

مثال (٥):

أثبت أن $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

أي أنه لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث أن

$0<|x-0|<\delta \longrightarrow |x\sin\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$.

وإذا كانت $0<|x|<\delta$ فإن $|x\sin\frac{1}{x}| = |x||\sin\frac{1}{x}|$

$0 \le |x| < \delta$

وكذلك لدينا $|\sin\frac{1}{x}| \le 1$ لجميع قيم $x\neq 0$.

أي بافتراض $\delta = \varepsilon$ فإننا نجد

$0<|x|<\delta \longrightarrow |x\sin\frac{1}{x}| < \varepsilon$.

مثال (٦) :

علما اثبات الآتي

a) $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, b) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$, e) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, g) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$.

وعلما استخدام هذه النتائج في التمارين وسوف نثبت بعض هذه النتائج بعد دراسة الدوال الأسية في المقرر الحقيقي.

تمارين

١- عين النهايات التالية باستخدام النظريات.

(i) $\lim_{x\to 1} (2x-1)(x)$, (ii) $\lim_{x\to 2} [3(2x-1)(x]$

(iii) $\lim_{x\to 2} [3(2x-1)(x+1)^2]$ (iv) $\lim_{x\to -1} (x+3)^2$

(v) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x+5}$, * (vi) $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-25}$

* (vii) $\lim_{x\to 5} \frac{x+5}{x^2-25}$.

٢- أوجد النهايات التالية أو أثبت أنها غير موجودة

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 2x}$, (ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{4x}$

(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sec 2x \tan 3x}{5x}$ (iv) $\lim_{x\to 0} \frac{15x}{\tan 6x}$

(v) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 7x}$ (vi) $\lim_{x\to 0} \frac{\cot 4x}{\cot 3x}$

(vii) $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos x}{\pi/2 - x}$ (viii) $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x}$

تعريف : إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة لقيم x كبيرة فإننا نقول أن الدالة $f(x)$ تقترب للنهاية L عندما $x \to \infty$ ونكتب :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

ومعنى هذا أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد M بحيث أن

$$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon \quad \longleftarrow \quad x > M$$

$$\equiv |f(x) - L| < \varepsilon$$

ملاحظة : الرمز ∞ يقرأ (لا نهاية) لأنه أي عدد حقيقي.

وحيث من القوانين الآتية . $\forall a \in \mathbb{R}$ فإن

$$a + (+\infty) = +\infty ,$$

$$a - (+\infty) = -\infty$$

$$a \cdot (+\infty) = +\infty \quad \text{if } a > 0$$

$$a \cdot (+\infty) = -\infty \quad \text{if } a < 0 ,$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty .$$

الحالات الآتية غير معرفة

$$(+\infty)/(+\infty) \quad , \quad 0 \cdot (+\infty) \quad , \quad (+\infty) + (-\infty) .$$

٢- أوجد النهايات الآتية

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 6x}{4x - 8}$, (ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{7x - 28}{x^3}$,

(iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 3}{x^3 + x - 5}$ $\operatorname{sgn} x$ (iv) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{[x]}\right)$

(v) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{4x-1}}$, (vi) $\lim_{x\to\infty} [\tan x + \sec x (5\cos x - \sin$

٣- أثبت أن $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1 + e^{1/x}} = 2$

٥- أوجد النهايات الآتية

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$,

٦- أثبت أن

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = b - a$, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \ln \frac{a}{b}$, $a, b > 0$

Continuous Functions : الدوال المتصلة

إذا كانت X، Y فضاء وكانت $f: X \longrightarrow Y$ والدالة f من X إلى Y فإن الدالة f يقال أنها متصلة عند النقطة $a \in X$ إذا كان $\lim_{x=a} f(x) = f(a)$.

$x \to a$
$\Rightarrow x - a \to 0$

وسوف نعرف النهاية كما يلي: أن الدالة f يقال أنها متصلة عند النقطة $a \in X$ إذا كان لكل عدد $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \longleftarrow |x - a| < \delta$$

لجميع قيم $x \in \bigcup_\delta(a)$ ، $f(x) \in \bigcup_\varepsilon f(a)$

بوضع $x - a = h$ إذا كان x تؤول إلى a فإن h تؤول إلى الصفر

$$|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon \longleftarrow |h| < \delta$$

والعدد δ يعتمد على ε، النقطة a

يقال للدالة f أنها متصلة على المجموعة الجزئية $S \subseteq X$ إذا كانت متصلة عند كل نقطة $b \in S$.

يقال أن الدالة f دالة غير متصلة إذا تحقق أحد الشروط التالية

أي إذا كان أي من الشروط التالية متحققاً

(i) $a \notin D(f)$

(ii) $\lim_{x \to a} f(x) \not< \infty$

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

إذا توافرت الشروط المذكورة في الدالة
كانت الدالة متصلة
$f(x_0)$ معينة (موجودة)
$\lim_{x \to x_0} f(x)$ الدالة عند x_0 موجودة (أي معينة)
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

مثال (1) : الدالة المعرفة بالعلاقة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

دالة غير متصلة ودالة لأنها (iii) متحققة.

$x \to 2$
$\therefore \lim_{x \to 2} x^2 = 4$ ①، $f(2) = 0$ ②
$\therefore$ ① $\neq$ ② $\Rightarrow$ III FULFILLED

مثال:

الدالة f حيث $f(x)=x$ دالة متصلة بجميع النقط $x\in\mathbb{R}$.

$|x-a|=h$

Note $f(x)=x$

وذلك لأنه إذا كانت $a\in\mathbb{R}$ وكان $\varepsilon>0$ فإن

$$|f(a+h)-f(a)|=|(h+a)-a|=|h|<\varepsilon$$

فإذا كانت $\delta=\varepsilon$ حيث δ أي عدد h يحقق العلاقة $|h|<\delta$ يؤدي إلى أن

$$|h|<\delta \longrightarrow |f(a+h)-f(a)|<\varepsilon$$

أي أن الدالة متصلة.

يلاحظ أن الدالة $f(x)=x$ دالة متصلة لجميع قيم x وذلك لأن العلاقة صحيحة لأي عدد $a\in\mathbb{R}$ كما لاحظنا على a في هذا المثال.

مثال (٢): Look

الدالة f معرفة بالصورة

f is defined at $x=0$
but not continuous at $x=0$

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{if } x<0\\ 1 & \text{if } x\geq 0\end{cases}$$

نطاق تعريف الدالة هو $\mathbb{R}$ ولاحظ أن مدى الدالة $\{-1,1\}$.

هذه الدالة غير متصلة عند النقطة $x=0$.

لإثبات ذلك نلجأ للطريق الغير مباشرة في البرهان

أي نوجد عدد h بحيث أن $|h|<\delta$ متى كان

Put $a=0$ and $h<0$

$$|f(0+h)-f(0)|=|f(h)-1|$$

فإذا كانت h بحيث أن $h<0$ تكون $f(h)=-1$

Suppose so, for if $x<0$ so $f(x)=-1$

وبالتالي

$$|f(0+h)-f(0)|=|f(h)-1|=|-1-1|=2$$

فإذا كانت $\varepsilon<2$ لا تكون العلاقة $|f(a+h)-f(a)|<\varepsilon$ صحيحة عند $a=0$.

Why

أي أن الدالة غير متصلة عند النقطة $x=0$.

$\varepsilon>0 \Rightarrow \delta>0$

نظرية (١):

إذا كانت f ، g دالتين متصلتين عند النقطة $x=a$ فإن

(i) $f(x) \pm g(x)$ ،

(ii) $\alpha f(x)$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$

(iii) $f(x) \cdot g(x)$

دوال متصلة عند النقطة $x=a$.

البرهان: (i) سوف نثبت برهاناً للدالة $f+g$ والباقي تمرين للطالب.

إذا أعطينا $\varepsilon > 0$ فيكون نصيب $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. وبما أن f دالة متصلة عند $x=a$ فيكون (يجد $\delta_1 > 0$ ، $\delta_2 > 0$) بحيث أن

$$|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon_1 \longleftarrow |h| < \delta_1 \,,\ a+h \in D(f) \quad (*)$$

$$|g(a+h) - g(a)| < \varepsilon_1 \longleftarrow |h| < \delta_2 \,,\ a+h \in D(g) \quad (*)$$

فإذا كانت $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ فكل عدد h يحقق العلاقة $|h| < \delta$ فإنه $a+h \in D(f+g)$ (*) وبالتالي

$$\begin{aligned} |(f+g)(a+h) - (f+g)(a)| &= |f(a+h) + g(a+h) - (f(a) + g(a))| \\ &= |(f(a+h) - f(a)) + (g(a+h) - g(a))| \\ &\le |f(a+h) - f(a)| + |g(a+h) - g(a)| \end{aligned}$$

$$< \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1 = \varepsilon \,.$$

أي أن الدالة $f+g$ دالة متصلة عند النقطة a .

نظرية: إذا كانت f دالة متصلة عند النقطة a فإنه لأي h حيث $|h| < \delta$ ، $a+h \in Df$ نجد أن $f(a+h) \neq 0$.

$|x+y| \geq |x| - |y|$

if $|h|$ changed slightly $\Rightarrow$ this change will we on the answer of (I)

البرهان: إذا كانت $\varepsilon > 0$ أي قيمة معطاة فكيف إيجاد $\delta > 0$ بحيث أنه

لكل h، $a+h \in D(f)$، يوجد $\delta > 0$، بحيث $|h| < \delta$

$$|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon_1 \qquad (I)$$

ومن ذلك فإن

$$|f(a+h)| = |f(a) + f(a+h) - f(a)| = |f(a) + (f(a+h) - f(a))|$$
$$\geq |f(a)| - |f(a+h) - f(a)|$$

$$\geq |f(a)| - \varepsilon_1$$

فإذا كانت $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}|f(a)|$ (II) فإن

$$|f(a+h)| \geq |f(a)| - \frac{1}{2}|f(a)| = \frac{1}{2}|f(a)| > 0$$

$|f(a+h)||f(a)| \geq \frac{1}{2}|f(a)|^2$

أي أن $f(a+h) \neq 0$.

نظرية (c): Look

إذا كانت الدالة f متصلة عند النقطة a ولا تساوي الصفر

فإن الدالة $\frac{1}{f}$ متصلة أيضاً عند $x = a$.

البرهان: إذا أعطينا $\varepsilon > 0$ عشوائياً إيجاد $\varepsilon_1 > 0$، $\delta > 0$ بحيث أن

$$\left|\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}\right| = \frac{|f(a+h) - f(a)|}{|f(a+h)||f(a)|} < \frac{2\varepsilon_1}{|f(a)|^2},$$

$|f(a) - f(a+h)| = |f(a+h) - f(a)|$ (*)

$a+h \in D(f)$.

فإذا كانت ε_1 بحيث أن

$$\varepsilon_1 = \min\left\{\frac{1}{2}|f(a)|, \varepsilon/2\,|f(a)|^2\right\}$$

فإن

$$\left|\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}\right| < \frac{2\varepsilon_1}{|f(a)|^2} < \varepsilon$$

أي أن الدالة $\frac{1}{f}$ متصلة عند النقطة $x = a$.

ملحوظة: إذا كانت f ، g دالتان متصلتان عند النقطة $x=a$ وكانت $f(a) \neq 0$ فإن الدالة $\frac{g}{f}$ دالة متصلة أيضا عند النقطة a.

نظرية (٤):

إذا كانت f دالة متصلة عند $x=a$ وكانت $f(a)>0$ $(f(a)<0)$ فإن يوجد مجاور $U(a)$ بحيث أن $f(x)>0$ $(f(x)<0)$ لكل نقطة $x \in U(a) \cap D(f)$.

$f(a)<0$

البرهان:

لدينا الدالة f متصلة فنختار ε بحيث $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(a)|$ ونوجد $\delta > 0$ بحيث

$$|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon \longleftarrow |h| < \delta,\ h+a \in D(f)$$

أي أن

$$|f(a+h) - f(a)| < \frac{1}{2}|f(a)|$$

$$f(a) - \frac{1}{2}|f(a)| < f(a+h) < f(a) + \frac{1}{2}|f(a)|$$

فإذا كانت $f(a)>0$ فإن الطرف الأيسر للمتباينة يعطي

$$\frac{1}{2} f(a) < f(a+h)$$

وإذا كانت $f(a)<0$ فإن الطرف الأيمن يؤدي إلى

$$f(a+h) < \frac{1}{2} f(a)$$

وهو المطلوب.

مثال (٤): الدالة f المعرفة بالقاعدة $f(x) = c$ ، $D(f)=\mathbb{R}$

c عدد حقيقي ثابت هي دالة متصلة عند جميع نقاط $D(f)$.

البرهان: لأي $\varepsilon > 0$ كيفما أخذ نجد $\delta > 0$ بحيث أن

$$|f(a+h) - f(a)| = |c-c| = 0 < \varepsilon$$

$|h| < \delta$ ، $a \in D(f)$.

أي أن الدالة متصلة عند أي نقطة $a \in \mathbb{R}$ لتمثل الدالة الثابتة.

مثال (٥) : الدالة f المعرفة بالقاعدة $f(x)=x$ دالة متصلة عند جميع نقاط $x_0 \in D(f)$ ، $D(f)=\mathbb{R}$.

إذا كانت $\varepsilon>0$ عين إيجاد $\delta>0$ بحيث أن
$|x-x_0|<\delta \Leftarrow |f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta=\varepsilon$
أي أن الدالة متصلة لجميع قيم $\delta=\varepsilon$.

تعريف : الدالة f حيث أن $f(x)=\sum_{r=0}^{n} a_r x^r$ ، $a_r \in \mathbb{R}$ ، $a_n \neq 0$ لا تظهر بالتعريف $D(f)=\mathbb{R}$ ويتضح بإضافة $\mathbb{R}$ وتسمى كثيرة حدود من رتبة n

من نظرية (١) : دالة كثيرة الحدود من أي رتبة n دالة متصلة عند جميع نقط نطاق التعريف .

تعريف : تسمى الدالة دالة خارج قسمة (rational function) إذا كانت خارج قسمة دالتين كثيرتي حدود .

من النظرية السابقة الدالة الخارج قسمة دالة متصلة عند جميع نقط نطاق التعريف .

مثال (٦) : الدالة f حيث أن $f(x)=\sqrt[n]{|x|}$ دالة متصلة عند جميع نقط $a \in D(f)$.

البرهان : باستخدام نظرية ذات الحدين $a,b>c$

$$(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})^n = a + {}^nC_1(\sqrt[n]{a})^{n-1}\sqrt[n]{b} + \dots + b$$

$$(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})^n \geq a+b$$
$$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b} \geq \sqrt[n]{a+b}$$
$$\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{a+b}-\sqrt[n]{b}$$

بالتعويض عن $a=|y-x|$ ، $b=|x|$ في

$$\sqrt[n]{|y-x|} \geq \sqrt[n]{|y-x|+|x|} - \sqrt[n]{|x|}$$
$$\geq \left| \sqrt[n]{|y|} - \sqrt[n]{|x|} \right|$$

وبالتالي إذا كان $\varepsilon > 0$ نختار $\delta = \varepsilon^n$ فإنه لكل عدد h

$$|f(a+h) - f(a)| = \left| \sqrt[n]{|a+h|} - \sqrt[n]{|a|} \right| \leq \sqrt[n]{a+h-a} = \sqrt[n]{|h|}$$
$$< \sqrt[n]{\delta} = \varepsilon$$

حيث $|h| < \delta$.

نظرية (٤) :

إذا كانت f دالة متصلة عند x_0 ، g دالة متصلة عند $y_0 = f(x_0)$ فإن الدالة المركبة $g \circ f$ متصلة عند النقطة x_0 .

البرهان :

بما أن الدالة g متصلة عند y_0 فيوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد $\varepsilon_1 > 0$ بحيث أن

$$|y - y_0| < \varepsilon_1 \text{ و } |x - x_0| < \delta$$

$$|g(y_0+k) - g(y_0)| < \varepsilon \leftarrow |k| < \varepsilon_1 \text{ ، } y_0 + k \in D(g)$$

بالنسبة للدالة f المتصلة عند x_0 فإنه توجد $\delta > 0$ لكل ε_1 بحيث أن العلاقة

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon_1 \qquad |h| < \delta \text{ ، } x_0 + h \in D(f)$$

هي المتباينة (١) إذا أعطينا k بحيث أن

$$f(x_0+h) - f(x_0) = k \quad , \quad |h| < \delta \text{ ، } f(x_0+h) \in D(g)$$

ينتج أن

$$|g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))| = |g(y_0+k) - g(y_0)| < \varepsilon$$

وبذلك فإن الدالة المركبة $g \circ f$ متصلة عند النقطة x_0 .

$$\text{in (1)} \quad |g(\underbrace{f(x_0)}_{y_0} + \underbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}_{k})| = |g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))|$$

مثال : الدالة $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ متصلة عند جميع قيم $x \neq -\frac{d}{c}$

والدالة $g(x)=\sqrt[n]{|x|}$ متصلة لجميع قيم $x_0 \in \mathbb{R}$.

الدالة المركبة $g[f(x)]=\sqrt[n]{\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right|}$

دالة متصلة لجميع قيم $x \in \mathbb{R}$ حيث أن $x \neq -\frac{d}{c}$.

تعريف : تسمى الدالة f منتظمة الاتصال إذا كان:
لكل عدد $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ ، بحيث إذا كان
$x_1, x_2 \in D(f)$ فإن
$|x_1-x_2|<\delta \longrightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

ملاحظة أن الدالة المنتظمة الاتصال دائماً دالة متصلة وعكس هذا غير صحيح أي توجد دوال متصلة وتكون غير منتظمة الاتصال كما في المثال التالي

مثال : إذا كانت $f:(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالعلاقة $f(x)=1/x$. أثبت أن الدالة غير منتظمة الاتصال .

إذا أعطيت $\varepsilon>0$ ... = $\delta>0$ فإن
$|x-a|<\delta \longrightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

أي أن
$|x-a|<\delta \longrightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|<\varepsilon$ (1)
من المتباينة $|x-a|<\delta$ نحصل على $a-\delta<x<a+\delta$
ومن المتباينة $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|<\varepsilon$ نحصل على
$\frac{1}{a}-\varepsilon<\frac{1}{x}<\frac{1}{a}+\varepsilon$
أي أن أكبر قيمة لـ δ تحقق المتباينة (1) هي

$\frac{1}{a-\delta}=\frac{1}{a}+\varepsilon \longrightarrow \delta=\frac{\varepsilon a^2}{\varepsilon a+1}$

وبالتالي فإن

$$\lim_{a\to 0}(\max \delta) = \lim_{a\to 0} \frac{\varepsilon a^2}{\varepsilon a+1} = 0$$

وهو يناقض شرط أن $\delta > 0$

وعليه أخذ δ لا تعتمد على a أي أن الدالة غير متصلة.

تمارين:

أختبر اتصال الدوال الآتية عند النقط المعطاة إلى أيها:

(i) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$, $f(0)=0$; $x=0$

(ii) $f(x) = x - |x|$; $x=0$

(iii) $f(x) = (x^3-8)/(x^2-4)$, $x \neq 2$, $f(2)=8$; $x=2$

(iv) $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & 0<x<1 \\ \sin x & 1<x<2 \end{cases}$; $x=1$

(v) $f(x) = \frac{4x^2-1}{2x+1}$, $x \neq -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = -2$; $x=-\frac{1}{2}$

(vi) $f(x) = \frac{2x+1}{4x^2-1}$, $x \neq -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$; $x=-\frac{1}{2}$

(vii) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1}$, $x \neq 1$, $f(1)=0$; $x=1$

(viii) $f(x) = 5x^3 - 3x^2$ عند $a \in \mathbb{R}$

(ix) $f(x) = \frac{3x^2-4}{x}$ $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

If $y = x^2$; $h = \Delta x$

2) $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$

2) $\Delta y = 2hx + h^2$ = function of variation in when x_0 2) at x_0

2) function of mean variation at $(x_0$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2hx_0 + h^2}{h}$

الفصل الرابع
تفاضل الدوال :

تعريف : إذا كانت f دالة معرفة بحيث $D(f) = [a,b]$ وكانت $x_0 \in (a,b)$ فإننا الدالة f قابلة للتفاضل عند النقطة x_0 إذا كانت النهاية :

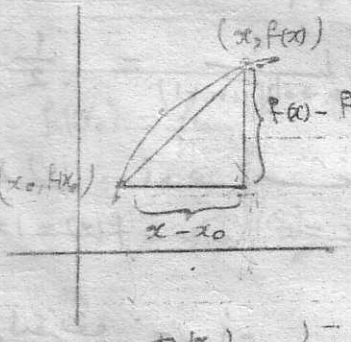
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

موجودة . ويرمز لهذه النهاية بالرمز $f'(x_0)$ أو $\frac{d}{dx} f(x_0)$ وتسمى مشتقة الدالة عند x_0 .

إذا كانت هذه النهاية موجودة عند اليمين (يسار) فإننا نقول أن الدالة f قابلة للتفاضل عن اليمين (اليسار) .

إذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل عند جميع نقط الفترة (a,b) فإننا نقول أن f قابلة للتفاضل في الفترة (a,b) .

المعنى الهندسي لمشتقة الدالة f : الماس هو مماس المنحنى



إذا رسم منحنى الدالة f وحددت عليه النقطة $(x_0, f(x_0))$ ثم نقطة أخرى مجاورة لـ $(x, f(x))$ على المنحنى فإن العلاقة

$$f(x) - f(x_0) = \phi(x)(x - x_0)$$

تمثل خط مستقيم يميل على الأفق بالمقدار $\phi(x)$ وعندما $x \to x_0$ فإن هذا الخط المستقيم يمثل المماس للمنحنى عند النقطة $(x_0, f(x_0))$. أي أن :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

ميل المماس للمنحنى عند النقطة $(x_0, f(x_0))$.

مثال (١) : أوجد مشتقة الدالة $f(x)=c$ عند $a \in \mathbb{R}$

c عدد ثابت.

لإيجاد المشتقة نوجد النهاية

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{c-c}{x-a}=\frac{0}{x-a}=0$$ أي أن

أي أن المشتقة موجودة وهي تساوي الصفر

أي أن الدالة $f(x)=c$ قابلة للاشتقاق عند جميع نقاط ظاهر التعريف

(نلاحظ أننا قد أثبتنا سابقاً أن هذه الدالة متصلة).

مثال (٢) : أوجد مشتقة الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالعلاقة

$f(x)=\sqrt{x}$ عند $x=1$

من التعريف $$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

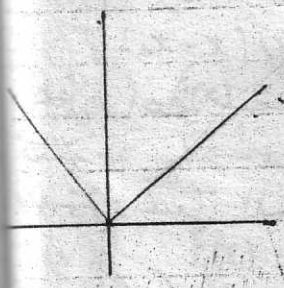
$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$$ LOOK

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}\cdot\frac{\sqrt{1+h}+1}{\sqrt{1+h}+1}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{1}{2}$$

مثال (٣) : أوجد مشتقة الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالعلاقة

$f(x)=|x|$ عند $x=0$ (إذا وجدت).



من التعريف نجد أن

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

ونلاحظ من الشكل أن الدالة $\frac{|h|}{h}$ ليس لها

نهاية عندما $h=0$ أي أن $f'(0)$ غير موجودة.

i.e. $\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=+1$ and $\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=-1$

$\Rightarrow$ no unique value of the limit

there is a derivative $\Leftrightarrow f'(x) = f'(x^+) = f'(x^-)$ at at the same time

مثال (٤): إذا كانت $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = x^n$ ، فأوجد مشتقة الدالة f عند النقطة x_0.

الحل: لتكن $x_0 + h \in D(f)$ حيث $h \neq 0$ فإن

$$\phi(h) = \frac{1}{h}\{(x_0+h)^n - x_0^n\}$$

باستخدام نظرية ذات الحدين

$$\phi(h) = \frac{1}{h}\left\{\sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, x_0^{n-r} h^r - x_0^n\right\}$$

$$= \frac{1}{h}\left\{\sum_{r=1}^{n} {}^nC_r\, x_0^{n-r} h^r\right\}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, x_0^{n-r} h^{r-1}$$

وبالتالي فإن

$$\phi(0) = n\, x_0^{n-1}$$

الدالة $\phi(h)$ دالة متصلة لجميع قيم h ما عدا $h = 0$

$$\lim_{h\to 0} \phi(h) = \phi(0)$$

فنحصل على

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \lim_{h\to 0} \phi(h)$$

$$= \phi(0) = n\, x_0^{n-1}$$

$\lim_{h\to 0^+} = \lim_{h\to 0^-}$

نظرية (١):

إذا كانت $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ وكانت $f(x)$ قابلة للتفاضل عند النقطة $x = a$ ، فإن $f(x)$ دالة متصلة عند $x = a$.

البرهان:

∴ الدالة $f(x)$ قابلة للتفاضل عند $x = a$ فإن المقدار

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} [f(a+h) - f(a)]/h$$

here $x \to a$

معكوس

$$\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h$$

$$= [f'(a)]\cdot 0 = 0$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a) \quad (1)$$

لأن $h\to 0$ تعني أن $x = a+h$ بوضع $x\to a$ وعليه كتابة (1) على الصورة

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

وهو تعريف لاتصال الدالة.

عكس النظرية (1) غير صحيح أي توجد دوال متصلة وتكون غير قابلة للتفاضل أنظر مثال (2).

نظرية (c)

إذا كانت الدالتان $f(x)$ ، $g(x)$ قابلتان للتفاضل عند نقطة $x\in\mathbb{R}$ وكانت c مقداراً ثابتاً فإن الدوال الآتية قابلة للتفاضل عند النقطة x:

$$cf(x),\ f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ f(x)/g(x) \text{ if } g(x)\neq 0$$

وتكون مشتقاتها بالصورة

(i) $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\cdot\frac{d}{dx}f(x)$;

(ii) $\frac{d}{dx}[f(x)\pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x)\pm\frac{d}{dx}g(x)$;

(iii) $\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$,

(iv) $\frac{d}{dx}[f(x)/g(x)] = \left[g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)\right]/(g(x))^2$;
$g(x)\neq 0$

البرهان: نترك لقارئ (iii) و(iv) والباقي كتمرين للطالب

(iii) $$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x+h)\,g(x) + f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{ f(x+h)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}$$

بما أن نهاية الجداء تساوي الجداء النهايات

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{h\to 0} f(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$+ \lim_{h\to 0} g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$

حيث $x\in\mathbb{R}$ و $x+h\in\mathbb{R}$.

وبذلك نكون قد برهنا (iii)

(iv) $$\frac{d}{dx}[f(x)/g(x)] = [g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)]/(g(x))^2,$$

$g(x)\neq 0$.

ملاحظة: نثبت أولاً أنه إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x وكانت $f(x)\neq 0$ فإن $(1/f)$ قابلة للاشتقاق عند x و

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f}\right)(x) = -\frac{1}{(f(x))^2}\frac{d}{dx}f(x).$$

البرهان: لتكن f قابلة للاشتقاق عند x فهي مستمرة عند x ولدينا $f(x)\neq 0$ وبالتالي توجد h بحيث $x+h\in D(f)$ و $f(x+h)\neq 0$

$$\left[\frac{1}{f}(x+h) - \frac{1}{f}(x)\right]/h = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\,\frac{f(x) - f(x+h)}{f(x)\,f(x+h)} = \frac{-1}{f(x+h)f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f}(x)\right) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{f}(x+h) - \frac{1}{f}(x)\right]/h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{f(x+h)f(x)} \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= -\frac{1}{[f(x)]^2}\frac{d}{dx}f(x) .$$

وبخصوص البرهان لرقم (iv) باستخدام (iii)، فالمسألة بسيطة.

نظرية (٣): قاعدة السلسلة (قانون السلسلة)

إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ، $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالتين بحيث f قابلة للتفاضل عند x_0 ، g قابلة للتفاضل عند $f(x_0)$ فإن الدالة $g\circ f$ قابلة للتفاضل عند x_0 ، ويحقق على

$$\frac{d}{dx}(g\circ f)(x_0) = \frac{d}{dx}\, g(f(x_0)) \cdot \frac{d}{dx} f(x_0) .$$

البرهان: بتعريف

$$\frac{d}{dx}(g\circ f)(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g[f(x)] - g[f(x_0)]}{x - x_0} \qquad x\in D_{(g\circ f)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{g[f(x)] - g[f(x_0)]}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

ولأن الدالة f قابلة للتفاضل عند x_0. تكون f دالة متصلة عند x_0 ويحقق على $x\to x_0$ ، $f(x)\to f(x_0)$.

إذا تكون لدينا

$$\lim_{f(x)\to f(x_0)} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \frac{d}{dx}\, g[f(x_0)] \quad \frac{d}{dx} f(x_0) .$$

look

نظرية (٤) : تفاضل الدالة العكسية

إذا كانت f دالة قابلة للتفاضل عند x_0 وكانت $\frac{df(x_0)}{dx} \neq 0$ وكانت الدالة f دالة عكسية وعليه فإن f^{-1} قابلة للتفاضل عند $y_0 = f(x_0)$ ويكون

$$\frac{d}{dx}(f^{-1}y_0) = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}$$

البرهان :

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

وذلك لأن الدالة f متصلة عند x_0 وبالتالي الدالة العكسية متصلة عند $y_0 = f(x_0)$ ،

$$\frac{d}{dx}(f^{-1})(y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{d}{dx}(f(x_0))}$$

التفاضل من الرتب العليا

إذا كانت f دالة قابلة للتفاضل عند كل نقطة في الفترة $[a,b]$ فإنه يوجد عملية التفاضل عليه لتعريف دالة جديدة $\frac{d}{dx}(f)$ تسمى مشتقة الدالة f في الفترة $[a,b]$. فإذا حدث وكانت الدالة الناتجة df/dx قابلة للتفاضل عند كل نقطة في الفترة $[a,b]$ فإننا نرمز للمشتقة الجديدة بالرمز $f''(x)$ أو $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ وتسمى الدالة الناتجة بمشتقة الدالة f من الرتبة الثانية. وبنفس الطريقة يمكننا الحصول على المشتقات الثالثة والرابعة ...

$$f^{(0)} = f \,,\; \frac{df}{dx} = f' = f^{(1)} \,,\; \ldots \,,\; f^{(n)} = \frac{d}{dx}(f^{(n-1)})$$

هذه النظريات التالية تكون لدينا القوانين التالية لإيجاد مشتقات الدوال الجبرية. إذا كانت f، g، h ... دوال، و c ثابت فإن

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}x = 1 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx}(f+g+h+\cdots) = \frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g + \cdots \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx}(cf) = c\frac{d}{dx}(f) \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{d}{dx}(g) + g\frac{d}{dx}(f) \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{c}\right) = \frac{1}{c}\frac{df}{dx} \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{f}\right) = c\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{c}{f^2}\frac{d}{dx}(f) \quad (7)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{d}{dx}g}{[g]^2}, \quad g \neq 0 \quad (8)$$

$$\frac{d}{dx}x^m = m\,x^{m-1} \quad (9)$$

$$\frac{d}{dx}(f^m) = m f^{m-1}\frac{d}{dx}f \quad (10)$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, f^{(n-r)}\, g^{(r)}, \quad {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (11)$$

مثال (١):

أوجد مشتقة الدوال

(i) $f(x) = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 + 9x^5$

(ii) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

الحل (i)

$$\frac{df}{dx} = 0 + 2 - 3(2x) - 5(3x^2) + 9(5x^4)$$
$$= 2 - 6x - 15x^2 + 45x^4$$

(ii) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = x^{-1} + 3x^{-2} + 2x^{-3}$

$$\frac{dP}{dx} = -x^{-2} + 3(-2x^{-3}) + 2(-3x^{-4})$$
$$= -x^{-2} - 6x^{-3} - 6x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}.$$

مثال (٤):

أوجد مشتقة الدوال الآتية

(i) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{2\sqrt{x^3}} - \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}$

(ii) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2} - \frac{1}{\sqrt{5x}}$

(iii) $f(x) = \sqrt{x^2+6x+3}$

نكتب (i) على الصورة

$$f(x) = 2x^{-1/2} + 6x^{-1/3} - 2x^{-3/2} - 4x^{-3/4}$$

$$\frac{dP}{dx} = 2\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) + 6\left(-\frac{1}{3}x^{-4/3}\right) - 2\left(-\frac{3}{2}x^{-5/2}\right)$$
$$-4\left(-\frac{3}{4}x^{-7/4}\right)$$
$$= -x^{-3/2} - 2x^{-4/3} + 3x^{-5/2} + 3x^{-7/4}$$

$$= -\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{2}{x^{4/3}} + \frac{3}{x^{5/2}} + \frac{3}{x^{7/4}}.$$

نكتب (ii) على الصورة

$$f(x) = (3x^2)^{1/3} - (5x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dP(x)}{dx} = \frac{1}{3}(3x^2)^{-2/3} \cdot 6x - \left(-\frac{1}{2}\right)(5x)^{-3/2} \cdot 5$$

$$= \frac{2x}{(9x^4)^{1/3}} + \frac{5}{2(5x)(5x)^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{9x}} + \frac{1}{2x}$$

تكملة (iii) على الصفحة

$$f(x) = (-x^2+6x+3)^{1/2}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{2}(-x^2+6x+3)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2+6x+3)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+6x+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+6)$$

$$= \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+3}} .$$

مثال (٢)

(i) أوجد مشتقة الدالة $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

(ii) إذا كان $x = y\sqrt{1-y^2}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

(أ) نكتب

$$f(x) = \frac{x^2}{(4-x^2)^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{(4-x^2)^{1/2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) - x^2 \cdot \frac{d}{dx}(4-x^2)^{1/2}}{4-x^2}$$

$$= \frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) - x^2 \cdot \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{4-x^2}$$

$$= \frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) + x^3(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{4-x^2} \cdot \frac{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2x(4-x^2)+x^3}{(4-x^2)^{3/2}} = \frac{8x-x^3}{(4-x^2)^{3/2}} .$$

(ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$ نعلم أن

$$\frac{dx}{dy} = (1-y^2)^{1/2} + \frac{1}{2}\, y(1-y^2)^{-1/2}(-2y) = \frac{1-2y^2}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{1-2y^2}$$ وهو ناتج نحصل على .

مثال (٤) :

أوجد $\frac{dy}{dx}$ لما $y = \frac{u^2-1}{u^2+1}$ ، $u = \sqrt[3]{x^2+2}$

نوجد أولا $\frac{dy}{du}$

$$\frac{dy}{du} = \frac{4u}{(u^2+1)^2}$$

ثم $\frac{du}{dx}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x}{3(x^2+2)^{2/3}} = \frac{2x}{3u^2}$$

نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{4u}{(u^2+1)^2} \cdot \frac{2x}{3u^2}$$

$$= \frac{8x}{3u(u^2+1)^2} .$$

مثال (٥) : أثبت أن الدالة $f(x) = x^3+3x^2-8x+2$ لها مشتقات من جميع الرتب عندما $x = a$.

الحل :

$$f^{(1)} = \frac{df}{dx} = 3x^2+6x-8 \quad , \quad f^{(1)}(a) = 3a^2+6a-8$$

$$f^{(2)} = \frac{d^2f}{dx^2} = 6x+6 \qquad f^{(2)}(a) = 6a+6$$

$$f^{(3)} = \frac{d^3f}{dx^3} = 6 \qquad f^{(3)}(a) = 6$$

(ii) وجميع المشتقات ذات الرتبة الأعلى $= 0$. أي أنه توجد مشتقات من جميع الرتب للدالة $f(x)$.

مثال (٦) :

اجث في إستمرارية المشتقات المتتالية للدالة $f(x) = x^{4/3}$ عندما $x=0$.

الحل :

$$f^{(1)}(0) = 0 \qquad f^{(1)} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{4}{9 x^{2/3}}$$ وبالتالي فإن $f^{(2)}(0)$ غير موجودة

وأن مشتقة ثانية أيضا غير موجودة عند $x=0$.

إذا فالمشتقة الأولى للدالة موجودة عند $x=0$ وهذا سواء مع إستمرارية ذات الرتبة الأعلى.

مثال (٧) :

إذا كانت $f(x) = \frac{2}{1-x}$ فأوجد المشتقة النونية لهذه الدالة.

الحل :

$$f(x) = \frac{2}{1-x} = 2(1-x)^{-1}$$

$$f^{(1)}(x) = 2(-1)(1-x)^{-2}(-1) = 2(1-x)^{-2} = 2.1!\,(1-x)^{-2}$$

$$f^{(2)}(x) = 2(1!)(-2)(1-x)^{-3}(-1) = 2(2!)(1-x)^{-3}$$

$$f^{(3)}(x) = 2(2!)(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 2.3!\,(1-x)^{-4}$$

وهكذا بالاستقراء الرياضي يمكن إثبات أن

$$f^{(n)}(x) = 2.n!\,(1-x)^{-(n+1)}$$

نظرية ليبنتز | إذا كانت الدالتين f، g قابلتين للتفاضل n من المرات فإن دالة حاصل الضرب (fg) قابلة للتفاضل n من المرات وتكون

$$(fg)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r \, f^{(n-r)} g^{(r)}$$

حيث

$${}^{n}C_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

التفاضلات :

عرفنا أن الرمز $\frac{dy}{dx}$ يدل على المشتقة الأولى للدالة y بالنسبة الى x وأوضحنا أن هذا الرمز لا يدل على خارج قسمة dy على dx لأنه ليس للرمز dx / dy معنى مستقل عن الآخر.

سوف نقوم الآن بتقديم تعريف جديد للعلاقة السابقة لتقديم في حساب تقريبية للتفاضل وأيضا في بعض حسابات التفاضل.

تعريف : نعرف الطرف الأيسر من المعادلة

$$dy = f'(x)\,dx$$

بأنه تفاضل y حيث $y = f(x)$.

dy يدل على عدد وليكن مثل d عن y في الحالة.

فإذا كانت لدينا الدالة $y = x$ فإن

$$dy = 1 \cdot dx$$

حيث $-\infty < dx < \infty$

فإذا كانت $dx = 0$ فإن dy ،

وإذا كانت $dx \neq 0$ فإن dy تدرس على نفسها.

مثال (1) : أوجد التقريبية لما يلي :

$$(1.001)^7 - 2(1.001)^{4/3} + 3$$

الحل عند $x_0 = 0$ فالمعادلة

$$f(x) = x^7 - 2x^{4/3} + 1$$

لأن $y = f(x_0) = 2$ ولأن قيمة x تتغير من 1 الى 1.001 أي أن $dx = .001$ فنجد أن.

$$dy = f'(x_0)\,dx \quad , \quad f'(x) = 7x^6 - \frac{8}{3}x^{1/3}$$

$$f'(x_0) = \frac{13}{3} \qquad dy = \frac{13}{3}(0.001) = 0.004$$

أي أن 2.0043 يعتبر تقريبا جيدا للدالة.

مثال :

$$(8.01)^{4/3} + (8.01)^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{8.01}} \quad , \quad \sqrt[4]{17} \quad , \quad (2.1)^3 \quad , \quad \sqrt{145}$$

اشتقاق الضمن :

الدوال الضمنية (الدوال غير الصريحة)

المعادلة $f(x,y)=0$ تعرف y كدالة ضمنية لـ x.

ضمنيا المعادلة $xy+x-2y-1=0$ ، $x\neq 2$ تعرف الدالة

$$y=\frac{1-x}{x-2}$$

والمعادلة $4x^2+9y^2-36=0$ تعرف الدالة

$$y=\tfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

اذا كانت $|x|\leq 3$ ، $y\geq 0$

وكذلك تعرف الدالة

$$y=-\tfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

اذا كانت $|x|\leq 3$ ، $y\leq 0$

ونلاحظ ان المعادلة السابقة تمثل قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ويقطع محور السينات عند النقطتين $(-3,0)$ ، $(3,0)$.

ولتسهيل الحصول على المشتقة $y^{(1)}=\frac{dy}{dx}$ باتباع احدى الطريقتين

(i) حل المعادلة بالنسبة لـ y (اذا كان ممكنا) ثم نوجد المشتقة بالنسبة لـ x

(ii) نعتبر y كدالة في x ونشتق المعادلة المفروضة بالنسبة لـ x ثم نحل العلاقة الناتجة بالنسبة الى $\frac{dy}{dx}$.

ولتعرف الطريقة (ii) باسم اشتقاق الضمن.

مثال (١) :

أوجد y' اذا كان $xy+x-2y-1=0$

بتطبيق (ii) نحصل على

$$x\frac{d}{dx}(y)+y\cdot\frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}x-2\frac{d}{dx}y-\frac{d}{dx}(1)=\frac{d}{dx}(0).$$

$xy' + y + 1 - 2y' = 0$ نحصل على

نحل المعادلة بالنسبة إلى y'

$$y' = \frac{1+y}{2-x}$$

مثال (٥):

إذا كان $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$ فأوجد y'

نفاضل المعادلة نحصل على

$$\frac{d}{dx}(x^2y) - \frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$x^2\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x^2) - x\frac{d}{dx}(y^2) - y^2\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$x^2y' + 2xy - 2xyy' - y^2 + 2x + 2yy' = 0$$

وبالتالي فإن

$$y' = (y^2 - 2x - 2xy)/(x^2 + 2y - 2xy)$$

مثال (٦):

إذا كان $xy + x - 2y - 1 = 0$ فأوجد y''

سبق إيجاد y' كما يلي:

$$y' = \frac{1+y}{2-x}$$

ونفاضل للمرة الثانية لإيجاد y''

$$\frac{d}{dx}(y') = y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+y}{2-x}\right)$$

$$= \frac{(2-x)y' + (1+y)}{(2-x)^2} = \frac{(2-x)\left(\frac{1+y}{2-x}\right) + 1 + y}{(2-x)^2}$$

$$= \frac{2+2y}{(2-x)^3}$$

مثال (٧):

إذا كان $x^3y + xy^3 = 2$ فأوجد y' ، y' عند $x = 1$

عن طريق المعادلة السابقة نجد أنه

$$x^3y' + 3x^2y + 3xy^2y' + y^3 = 0$$

ثم نفاضل مرة أخرى

$$x^3y'' + 3x^2y' + 3x^2y' + 6xy + 3xy^2y'' + 6xy(y')^2 + 3y^2y' + 3y^2y' = 0$$

بوضع $x=1$ نجد أنه $y=1$ ثم بالتعويض في المشتقة الأولى نحصل على $y'=-1$

بالتعويض عن $x=1$ ، $y=1$ ، $y'=-1$ في المعادلة الثانية نحصل على $y''=0$.

تمارين :

١) أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية :

a) $x^5+5x^4-10x^2+6$ ، $\frac{1}{2}x^{-2}+4x^{-\frac{1}{2}}$ ، $\sqrt{2x}+2\sqrt{x}$.

b) $(3x-x^3+1)^4$ ، $\left(\frac{x}{1+x}\right)^3$ ، $x\sqrt{3-2x^2}$ ، $\sqrt{1+\sqrt{x}}$.

c) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ ، $(x^2+3)^4(2x^3-5)^3$ ، $\left[(x^3-1)/(2x^3+1)\right]^4$.

٢) أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال

(i) $x=(1+2y)^3$ ، (ii) $x=\frac{1}{2+y}$

٣) أوجد مشتقة الدالة المركبة $g\circ f$ في الحالات الآتية

(i) $f(x)=\sqrt{x}$ ، $g(y)=\frac{y-1}{y+1}$ ،

(ii) $f(x)=x^2+2x$ ، $g(y)=y^3+4$ ،

(iii) $f(x)=\sqrt{x}$ ، $g(y)=\sqrt{1+y}$.

٤) أوجد المشتقة الثانية لكل من الدوال الآتية :

(i) $f(x)=3x^4-2x^2+x-5$

(ii) $f(x)=1/\sqrt{x}$

(iii) $f(x)=x/\sqrt{x-1}$

٥) أوجد المشتقة النونية للدوال

(i) $y=\frac{1}{x^2}$ ، (ii) $y=\frac{1}{3x+2}$

٦) في العلاقة $x=f(y)$ أثبت أن $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$

$$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$$

$\frac{d(g(x))}{dx}=\frac{dg(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$

$\frac{d(1/y')}{dy}=\frac{d(1/y')/dx}{dy/dx}$

$=(y'(-y'')-1(y''))/y'^2$

notice we can't derivate ① & ② w.r.t $1/y$ because $1/y$ & y are functions of the variable (x) . $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$

$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left[\frac{dx}{dy}\right]=\frac{d(1/y')}{dy}=\frac{-y''}{(y')^3}$ & $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{d(-y''/y'^3)}{dy}$ ②

الفصل الخامس

الدوال الاوليه فى المتغير الحقيقى

١ - الدالة الاسيه والدالة اللوغاريتميه :

من اهم الدوال فى الرياضة هى الدالة E التى تعرف لجميع قيم $x \in R$ بواسطة المتسلسلة اللانهائية الاتية :

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (1)$$

هذه الدالة متصلة لجميع قيم $x \in R$ ولها الخاصية

$$E(x_1 + x_2) = E(x_1) \cdot E(x_2) \quad (A)$$

حيث $x_1, x_2 \in R$.

نظرية (١) : اذا كانت E هى الدالة المعرفة بالعلاقة (١) فان

١) $E(0)=1$ ، $E(-x)=\frac{1}{E(x)}$ ، $E(x)>1$ لقيم $x>0$ ؛ $0<E(x)<1$ لقيم $x<0$.

٢) E دالة مستمرة الزيادة (اى انه اذا كانت $x_1 < x_2$ فان $E(x_1) < E(x_2)$.

٣) لقيم x القياسية فان $E(x) = \{E(1)\}^x$.

٤) $E(1) = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

البرهان : ١ - من العلاقة (١) فان

$$E(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

لقيم $x = 0$ فان

$$E(0) = 1$$

ولان $E(x_1 + x_2) = E(x_1) \cdot E(x_2)$

بوضع $x_2 = -x_1$ نجد ان

$$1 = E(0) = E(x_1) \cdot E(-x_1)$$

اى ان

$$E(-x) = \frac{1}{E(x)} \qquad (2)$$

من (١) يتضح ان $E(x) > 1$ لقيم $x > 0$ ومن (2) نجد انه لقيم $x < 0$ فان $0 < E(x) < 1$.

٢ ـ يمكننا كتابه

$$E(x_1) = E(x_1 - x_2 + x_2)$$
$$= E(x_1 - x_2).E(x_2) \qquad (3)$$

فاذا كانت $x_1 < x_2$ اى ان $x_1 - x_2 < 0$ يكون

$$0 < E(x_1 - x_2) < 1 \quad , \quad E(x_2) > 0$$

$\therefore$ العلاقه (3) توضح

$$E(x_1) < E(x_2).$$

٣ ـ من العلاقه (A) لقيم $x = n$ نجد ان $n \in N$,

$$E(n) = \left[E(1)\right]^n$$

لقيم $x = \frac{1}{n}$, $n \in N$

$$\therefore E(1) = E(n \cdot \tfrac{1}{n}) = \left[E(\tfrac{1}{n})\right]^n$$

اى ان

$$\left[E(1)\right]^{\frac{1}{n}} = E(\tfrac{1}{n})$$

لقيم $x = \frac{m}{n}$ نجد ان $n, m \in N$,

$$E(x) = E(\tfrac{m}{n}) = E(m \cdot \tfrac{1}{n}) = \left[E(\tfrac{1}{n})\right]^m$$
$$= \left[E(1)\right]^{\frac{m}{n}} = \left[E(1)\right]^x .$$

وبنفس الخاصيه (A) يمكن اثبات العلاقه السابقه فى حالـــــــة $x = -\frac{m}{n}$.

٤ ـ من المعروف لقيم $n \geq 2$

$$1 + \frac{1}{n} < \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \frac{1}{n^r} = E(\tfrac{1}{n}) = \left[E(1)\right]^{1/n}$$
$$< 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} = 1 + \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{n^r}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{n^r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}$$

$$1 + \frac{1}{n} < E(1)^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right] = 1 + \frac{1}{n-1}$$

وبالتالى برفع المتباينه الى القـــــــوة n نجد ان

$$(1 + \frac{1}{n})^n < E(1) < (1 + \frac{1}{n-1})^n$$

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$ فاذا رمزنا للنهايـــــة

نحصل على

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \leq E(1) \leq \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n-1})^n = e$$

$$\therefore E(1) = e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

نتيجـــــة : اذا كانـــت $x \in Q$ فان $E(x) = e^x$

تعريـــف (١) : اذا كانـــت $x \in R - Q$ فاننانعرف $E(x) = e^x$

ولذلك فالدالـــه E حيث $D(E) = R$ تسمى الدالـه الاسيـــــة

نظريـــة (٢) : الدالـه الاسيـــــــه e^x تحقق:

(a) $\lim_{x \to \infty} e^x / x^m = +\infty$,

(b) $\lim_{x \to -\infty} e^x x^m = 0$

اذا كانـــت $m \in Z$, $m \geq 0$.

ومعنى ذلك ان الدالـه الاسيه تزيد بسرعـــــــه الـــــى ∞ اكثرمن اى قـوة للعـــدد x .

البرهان (a) لاى عـدد c يمكننا ايجـــاد $X = |c|\,(m+1)!$ بحيث

$$\frac{e^x}{x^m} = \frac{1}{x^m} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} > \frac{x^{m+1}}{x^m (m+1)!} = \frac{x}{(m+1)!} > \frac{X}{(m+1)!}$$

$$> |c| \geq c$$

لقيم $x > X$

اى انه لاى عـــــــدد c فان $\frac{e^x}{x^m} > c$ وهذا يعنى $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^m} = +\infty$,

$$|x^m e^x| = |x^m| \cdot |e^x| = \frac{|x|^m}{1} \times \frac{1}{e^{|x|}} = \frac{|x|^m}{e^{|x|}}$$

$$\because \frac{e^{|x|}}{|x|^m} > \frac{\frac{|x|}{(m+1)!}}{\frac{x}{(m+1)!}}$$

$$\therefore \frac{|x|^m}{e^{|x|}} < \frac{(m+1)!}{x}$$

(b) لنختار $\varepsilon > 0$ فيمكننا تعيين $X = \frac{(m+1)!}{\varepsilon}$ ونجد أنه لقيم $x < -X = -\frac{(m+1)!}{\varepsilon}$ أن

$$|x^m e^x| = \frac{|x|^m}{e^{|x|}} < \frac{(m+1)!}{|x|} < \frac{(m+1)!}{X} = \varepsilon$$

وهذا يعني ان $|x^m e^x|$ اصغر من اى عدد تختاره ε وبذلك يكون

$$\lim_{x \to -\infty} x^m e^x = 0$$

من نظريه (٢) وتعريف الدالة الاسيه يتضح ان الدالة e^x دالة وحيدة

أى ان $R(E) = \{y , y > 0\}$, $D(E) = R$ وبذلك

فان الدالة العكسيه يمكن تعريفها :

تعريف (٢): الدالة العكسيه للدالة الاسيه تسمى الدالة اللوغاريتميه ونرمز لها بالرمز Log_e أو Ln بحيث

$$D(Ln) = \{x ; x > 0\} \quad ; \quad R(Ln) = R$$

نظريه (٣): للدالة Ln المعرفه سابقا نجد ان

١) اذا كانت $x \in R$ فان $x = Ln\, e^x$ و اذا كانت $x > 0$ فان $x = e^{Ln\, x}$

٢) الدالة اللوغاريتميه دالة متصلة ومستمرة الزيادة.

٣) $Ln(x_1 \cdot x_2) = Ln\, x_1 + Ln\, x_2 \quad , x_1, x_2 \in D(Ln)$

٤) $Ln\, 1 = 0 \quad , Ln\, \frac{1}{x} = -Ln\, x$

٥) $\lim_{x \to +\infty} Ln\, x = \infty \quad , \lim_{x \to 0^+} Ln\, x = -\infty$

٦) $\lim_{x \to \infty} \frac{Ln\, x}{x} = 0 \quad , \lim_{x \to 0^+} x\, Ln\, x = 0$

٧) اذا كانت $r \in Q$ فان $Ln\, x^r = r\, Ln\, x$

(1) let $e^y = x \Rightarrow \ln x = y$

$\Rightarrow$ $x = e^{\ln x}$

(2) $\ln(x_1 \cdot x_2)$; let $x_1 = e^{\ln x_1}$ and $x_2 = e^{\ln x_2}$ $\Rightarrow \ln(e^{\ln x_1 + \ln x_2})$ $= \ln x_1 + \ln x_2$

البرهان : ١ ، ٢ واضحان من التعريف

٣ ـ اذا كانت $y_1 = \ln x_1$ ، $y_2 = \ln x_2$ حيث $x_1, x_2 > 0$

فان $x_1 = e^{y_1}$ ، $x_2 = e^{y_2}$

ومن ذلك

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(e^{y_1} \cdot e^{y_2}) = \ln(e^{(y_1+y_2)})$$

$$= y_1 + y_2 = \ln x_1 + \ln x_2 .$$

٤ ـ نعلم ان $1 = e^0$ فيكون

$$\ln 1 = 0 = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln x + \ln \frac{1}{x}$$

اى ان $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

٥ ـ اذا اعطينا العدد C واخترنا X نحقق العلاقة $X = e^{|c|}$

وكانت x عدد بحيث $x > X$ فنجدان

$$\ln x > \ln X = \ln e^{|c|} = |c| \geq c$$

ومن ذلك ينتج ان

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$$

واذا اخترنا العدد δ يحقق العلاقة $\delta = e^{-|c|} > 0$ نجدان

العدد h بحيث $0 < h < \delta$ يحقق

$$\ln h < \ln \delta = \ln e^{-|c|} = -|c| \leq c$$

اى ان

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

٦ ـ من خواص الدالة الاسية انه لكل عدد $\varepsilon > 0$ يمكننا تعيين العدد $Y > 0$ بحيث انه لقيم y بحيث $y > Y$ فان

$$e^y / y > \frac{1}{\varepsilon} \quad , \quad y/e^y < \varepsilon$$

اى انه لقيم x بحيث

$$x = e^y > X = e^Y > 1$$

نجد ان

The sequance of the quantities we determine first in order to carry out the calculations we need in practical works. (*)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \left|\frac{\ln x}{x}\right| = \frac{y}{e^y} < \varepsilon$$

وايضا من خواص الداله الاسيه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $Y < 0$ بحيث انه لقيم y بحيث $y < Y$ فان $|e^y\, y| < \varepsilon$. فاذا كانت h عدد يحقق العلاقة $0 < h = e^y < \delta = e^Y < 1$

نجد ان $|h \ln h| = -h \ln h = -e^y\, y = |e^y\, y| < \varepsilon$

اى ان $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$

٧ - من (٣) نجد انه اذا كانت $r = n$ فان $n \in N$,

$$\ln x^n = n \ln x.$$

ج اذا كان $r = \frac{1}{n}$ فان $n \in N$,

$$\ln x = \ln \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = n \ln (x^{\frac{1}{n}})$$

اى ان

$$\ln x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \ln x$$

جج ولقيم $r = \frac{m}{n}$ فان $m, n \in N$,

$$\ln x^{\frac{m}{n}} = \ln (x^{1/n})^m = m \ln (x^{1/n}) = \frac{m}{n} \ln x$$

ججج ولقيم $r = -\frac{m}{n}$ فان $m, n \in N$,

$$\ln x^r = -\ln \left(\frac{1}{x^r}\right) = -\ln (x^{\frac{m}{n}}) = -\frac{m}{n} \ln x$$

وايضا اذا كانت $r = 0$ فان

$$\ln y^0 = \ln 1 = 0 .$$

تعريف (٣) : اذا كانت $a > 0$, $x \in R$ فاننا نعرف

$a^x = e^{x \ln a}$ بالعلاقة عدد حقيقى يسمى داله القوى للاساس a والقوة x .

نتيجة : اذا كانت $a, b > 0$, $x \in R$ نجد

١ - $\ln a^x = x \ln a$

٢ - $a^{x_1} . a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$,

٣ - $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 . x_2}$

٤ - $a^x . b^x = (a.b)^x$,

تعريف (٤) : اذا كانت $a > 0$, $x \in R$ تعرف الدالة $f(x) = a^x$ بالدالة الاسيه للاساس a.

نظرية (٤) : للدالة الاسيه للاساس a فان

١) الدالة $f(x) = a^x$ دالة متصله

٢) دالة دائمة التزايد لقيم $a > 1$

٣) اذا كانت $a > 0$ فانه لقيم $m \geq 0$, $m \in Z$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^m} = +\infty \quad (1) \qquad ,* \lim_{x \to -\infty} x^m \cdot a^x = 0 \quad (2)$$

ولقيم $a < 0$ فان

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a^x}{x^m} = (-1)^m \cdot \infty \quad (3) \qquad ,* \lim_{x \to +\infty} x^m \cdot a^x = 0. \quad (4)$$

البرهان : ١ ـ الدالة a^x متصله لانها دالة مركبه من دوال متصلـــه

٢ ـ لقيـــم $a > 1$, $x_1 < x_2$, $\ln a > 0$ نجد ان

$$x_1 \ln a < x_2 \ln a$$

$$a^{x_1} = e^{x_1 \ln a} < e^{x_2 \ln a} = a^{x_2}$$

وفي حالـة $a < 1$ يمكن اثبات النتيجه بالمثل .

٣ ـ لقيم $a > 1$ نعين $y = x \ln a$ فيكون

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x^m} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{x \ln a}}{x^m} = \lim_{y \to \infty} (\ln a)^m \frac{e^y}{y^m}$$

$$= (\ln a)^m \lim_{y \to \infty} \frac{e^y}{y^m} = \infty .$$

واذا كانت $a < 1$ تصبح $a' = \frac{1}{a} > 1$, $x = -y$ فنجد ان

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a^x}{x^m} = \lim_{y \to \infty} \frac{a'^y}{(-y)^m} = (-1)^m \lim_{y \to \infty} \frac{a'^y}{y^m}$$

$$= (-1)^m \cdot \infty$$

ويترك اكمال البرهان كتمرين .

تعريف (٥): اذا كانت $x > 0$, $\alpha \in R$ فاننا نعرف الدالة $f(x) = x^{\alpha}$ بالعلاقة $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ وتسمى دالة القوى لجميع قيم α .

تفاضل الدالة الاسيه والدالة اللوغاريتمية .

نظرية : الدالة $E(x) = e^{x}$, $x \in R$ قابلة للتفاضل عند جميع النقط x_0 حيث $x_0 \in R$ ويكون $E'(x_0) = e^{x_0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1$$

البرهان: نبرهن اولا ان:

لقيم $x \neq 0$ نجد ان

$$\frac{e^{x} - 1}{x} = \frac{1}{x}\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r}}{r!} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^{r}}{r!} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^{r-1}}{r!}$$

لكن متسلسلة القوى $\sum_{r=1} \frac{x^{r-1}}{r!}$ دالة متصلة لجميع قيم x ومنه نجد ان

$$\lim_{x \to 0} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^{r-1}}{r!} = 1$$

اي ان

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \sum_{r=1} \frac{x^{r-1}}{r!}$$

ولايجاد مشتقة $E(x)$ عند النقطة x_0 فان

$$\frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \frac{e^{x_0} e^{h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{h} - 1}{h}$$

باخذ النهاية عندما $x \to 0$ فان

$$E'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0}$$

اي ان

$$(e^{x})'_{x_0} = e^{x_0}$$

$y = f(x)$ ∴ $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$ (of the original f; look at it every time; of the inverse function f^{-1})

if $y = \ln x$ & $x = e^y$ ∴ $dx/dy = e^y = x$

$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$

and for any $y = f(x)$

$\therefore \frac{d[\ln f(x)]}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$

نظـــرية : اذا كانت $x > 0$ فان $\ln x$ قابله للتفاضل عند جميع قيم $x > 0$ ويكون

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad , \quad x > 0$$

البرهان : هناك طريقان لاثبات النظريه

$x = e^y$ ∴ $\ln x = y$; $x = e^{\ln x}$

١) الدالة :

$$f(x) = \ln x$$

هى الدالة العكسية للدالة e^x وبذلك نستخدم قانون e^y تفاضل الدالة العكسيه اى ان

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} .$$

٢) من تعريف المشتقه بعد اثبات ان : $\lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h} = e$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln(1 + \frac{h}{x_0})}{h/x_0} = 1/x_0$$

وذلك نجد ان :

وذلك بوضع $x = \frac{1}{h}$ ∴ as $x \to \infty$ ∴ $h \to 0$

$$(\ln x_0)' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln(x_0)}{h}$$

as $x \to x_0$, $h \to 0$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln x_0 (1 + h/x_0) - \ln x_0}{h}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$; $y = (e^g)_b$ & g any function or variable

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x_0} \frac{\ln x_0 + \ln(1 + h/x_0) - \ln x_0}{h/x_0}$$

$$= \frac{1}{x_0} \lim_{\frac{h}{x_0} \to 0} \frac{\ln(1 + h/x_0)}{h/x_0} = \frac{1}{x_0}$$

$\lim_{h/x_0 \to 0} \left[(h/x_0)^{-1} \ln(1 + h/x_0) \right] = \ln(1 + h/x_0)^{x_0/h}$

واذا كانت g دالة قابله للتفاضل بالنسبه لـــــ x نجد ان القوانين الاتيه :

$\ln \left[\lim_{x_0/h \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x_0/h}\right)^{x_0/h} \right] = \ln e = 1$

$$1 - \frac{d}{dx}(e^g) = e^g \cdot \frac{dg}{dx}$$

$$2 - \frac{d}{dx}(a^g) = a^g \ln a \cdot \frac{dg}{dx} \quad , \quad a > 0$$

$a^g = e^{g \ln a}$ ∴ $\frac{d}{dx}(e^{g \ln a}) = e^{g \ln a} \cdot \left[g \times 0 + \ln a \cdot \frac{dg}{dx} \right] = a^g \cdot \ln a \cdot \frac{dg}{dx}$

[note that $\ln a$ = constant]

3. $\frac{d}{dx}(\ln g) = \frac{1}{g} \cdot \frac{dg}{dx}$

4. $\frac{d}{dx}(\log_a g) = \frac{1}{g} \log_a e \cdot \frac{dg}{dx}$, $a > 0$, $a \neq 1$

الاشتقاق اللوغاريتمي :

اذا كانت الدالة f قابله للاشتقاق ومكونه من حاصل ضرب عدة عوامل فانه يمكن تبسيط طريقة ايجاد f' باخذ اللوغاريتم للدالة قبل الاشتقاق أى نستعمل الصيغة الاتيه :

$$\frac{d}{dx}(f) = (f)\frac{d}{dx}(\ln f).$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a g) = \frac{1}{g}\log_a e \frac{dg}{dx}$$

مثال (١) : اثبت ان :

نفرض ان $f = \log_a g$ حيث g قابله للاشتقاق

فيكون

$$\frac{df}{dg} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(g+h) - \log_a(g)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \log_a \left(\frac{g+h}{g}\right)/h = \lim_{h \to 0} \frac{1}{g} \cdot \frac{\log_a(1+h/g)}{h/g}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{g} \log_a (1+h/g)^{g/h} = \frac{1}{g} \lim_{h \to 0} \log_a (1+h/g)^{g/h}$$

$$= \frac{1}{g} \log_a e$$

وباستخدام قانون تفاضل داله الداله نجد ان :

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dg}(\log_a g) \cdot \frac{dg}{dx} = \frac{1}{g} \cdot \log_a e \cdot \frac{dg}{dx}$$

بوضع $a = e$ يكون $\log_a e = \log_e e = 1$,

اى ان :

$$d/dx (\ln g) = 1/g \frac{dg}{dx}$$

مثال (٢) :

اثبت ان $2 < \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n < 3$

اذا كانت n عدد صحيح موجب اى $n \in N$ باستخدام نظرية ذات الحدين فان :

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}(\frac{1}{n})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(\frac{1}{n})^3$$
$$+ \dots + \frac{n(n-1) \dots 1}{1.2. \dots n}(\frac{1}{n})^n$$
$$= 1 + 1 + (1 - \frac{1}{n})\frac{1}{2!} + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\frac{1}{3!}$$
$$+ \dots + (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n}) \cdot \frac{1}{n!}$$

فاذا كانت $n \neq 1$ فان

$(1 + \frac{1}{n})^n$ اكبر من 2 وكذلك اذا استبدلنا كل حد فى المقوك السابع بعدد نجد انه :

i.e. $\frac{0}{5}$ as $n \to \infty = 0$

$$(1 + \frac{1}{n})^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$
$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

وذلك لان $(\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}})$

ونعلم ان مجموع المتسلسله الموجوده فى الطرف الايمن هو اقل من :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$(1 + \frac{1}{n})^n < 2 + 1 = 3.$$ اى ان

مثال (٣) :

اوجد مشتقه الداله $y = \log_a (3x^2 - 5)$

$$\therefore dy/dx = \frac{1}{3x^2-5} \log_a e \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 - 5) =$$
$$= \frac{6x}{3x^2 - 5} \log_a e$$

مثال (٤) : اثبت ان $\frac{d}{dx}(a^g) = a^g \ln a \frac{dg}{dx}$

حيث g دالة قابلة للتفاضل

لتكن $f = a^g$ باستخدام اللوغاريتمات نجد ان

$$\ln f = g \ln a$$

من مثال (١)

$$\frac{d}{dx}(\ln f) = \frac{1}{f}\frac{df}{dx} = \ln a \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} = f \ln a \frac{dg}{dx}$$ اى ان

$$= a^g \ln a \frac{dg}{dx}$$

بوضع $a = e$ $\therefore$ $\ln a = \ln e = 1$

ومنه نحصل على

$$\frac{d}{dx}(e^g) = e^g \frac{dg}{dx}.$$

مثال (٥): اوجد مشتقة $y = \ln (x + \sqrt{1 + x^2})$

$$y' = \frac{1 + \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)}{x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

وذلك بتوحيد المقامات فى البسط.

مثال (٦) : اوجد المشتقة الثانية للدالة $y = e^{-x} \ln x$.

$$y' = e^{-x} \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{1}{dx}(e^{-x})$$

$$= \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x} \ln x = \frac{e^{-x}}{x} - y$$

$$y'' = \frac{x \frac{d}{dx}(e^{-x}) - e^{-x} \frac{d}{dx}(x)}{x^2} - y' = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} + e^{-x} \ln x$$

$$y'' = -e^{-x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x\right).$$

ايجاد

مثال (٧) : اوجد مشتقه الداله $y = x^2 3^x$

$$y' = x^2 \cdot \frac{d}{dx}(3^x) + 3^x \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2 3^x \ln x + 3^x (2x)$$

$$= x 3^x (x \ln 3 + 2)$$

مثال (٨) : استخدام اللوغاريتمات ثم اوجد مشتقه الداله

$$y = (x^2 + 2)^3 (1 - x^3)^4$$

$$\ln y = \ln\left[(x^2 + 2)^3 (1 - x^3)^4\right]$$

$$= 3 \ln (x^2 + 2) + 4 \ln (1 - x^3)$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \ln y = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = y \frac{d}{dx}\left[3\ln(x^2+2)+4 \ln(1-x^3)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 2)^3 (1-x^3)^4 \left[\frac{6x}{x^2+2} - \frac{12x^2}{1-x^3}\right]$$

$$= 6x (x^2 + 2)^2 (1-x^3)^3 (1-4x - 3x^3)$$

ـ(تمارين)ـ

اوجد المشتقه الاولى للداله الاتيه :

(١) $f(x) = e^{5x}$ ، (٢) $f(x) = e^{x^3}$ ، (٣) $f(x) = 3^{-x^2}$

(٤) $f(x) = e^{ex}$.

(٥) اذا كانـــــت $f(x) = x^2 e^x$ اثبت ان :

$$f^{(3)}(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x$$

اوجد مشتقات الدوال الاتيه :

(٦) $f(x) = \ln (4x - 5)$, (٧) $f(x) = \ln (\sqrt{3-x^2})$

(٨) $f(x) = \ln 3x^5$, (٩) $f(x) = \ln (x^2+x-1)^3$

(١٠) $f(x) = x \ln x - x$, (١١) $f(x) = (\ln x^2)/x^2$

(١٢) عين النطاق والتطاق المصاحب فى الدوال السابقه . استخدام اللوغاريتمات ثم اوجد مشتقات الدوال الاتيه :

(١٣) $f(x) = x^x$, (١٤) $f(x) = x^{\ln x}$

(١٥) $f(x) = x^{e^{-x^2}}$

(١٦) اثبت ان $\frac{d^n}{dx^n}(x e^x) = (x + n) e^x$

(١٧) اثبت ان $\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} \ln x) = \frac{(n-1)!}{x}$

(١٨) اوجد المشتقه الاولى للدوال الاتيه :

$x^3 e^{3x}$, $x^m e^{2x}$, a^{x^3} , 5^{x^2+2x} , $3^{(3-x)}$

(١٩) اوجد المشتقه الاولى للدوال $2^{\sqrt{x}}$, $7^{(-1/x)}$, $4^{(x^2+3x)^2}$

(٢٠) " " " "

$e^x \cdot e^x$, e^x/e^x , $2a^x/xe^x$

(٢١) اذا كان $e^{2x} - \ln (y^2 + 4) = 0$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$

(٢٢) اذا كان $2 \ln (x+y) + \ln \frac{x}{y} = 0$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$

(٢٣) " " $x^2 - y^2 \ln xy = 0$ $\frac{dy}{dx}$

(٢٤) اوجد المشتقه الاولى للدوال الاتيه :

$\ln \frac{x(1-x)}{(3-x)^2}$, $\log_{10} \frac{(x-1)^2}{(2x-3)}$, $\ln \left[x + \sqrt{x^2-1}\right]$,

$\ln (x^2+\sqrt{1-2x})$, $\ln \left[(x^2 + 5x + 3)(x^2 + 4x-1)\right]$, $\ln \sqrt[n]{1-x^2}$.

ب- الدوال المثلثية :

تعريف(١): باستخدام متسلسلتي القوى

$$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} ,$$

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

لجميع قيم $x \in R$ فاننا نعرف دالتان هما $\sin x$, $\cos x$ على الترتيب

تعريف(٢) : الدالة f تسمى داله زوجيه (أوفرديه) اذا كانت لجميع قيم $x \in D(f)$, $-x \in D(f)$ نجد ان

$f(x) = f(-x)$, $(f(x) = -f(-x))$

ونجد ان منحنى الداله الزوجيه متماثل بالنسبه لمحور الصادات بينما منحنى الداله الفرديه متماثل بالنسبه لنقطه الاصل.

نظرية(١) : الدالتان $\sin x$, $\cos x$ لهما الخواص التالية

١) $\sin x$, $\cos x$ دالتان متصلتان لجميع قيم x.

٢) $\cos x = \cos(-x)$, $\sin x = -\sin(-x)$.

٣) لقيم $x_1, x_2 \in R$ ترتبط الدالتان بالعلاقات الاتيه

(A) $\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$

(B) $\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$

نتيجه(١) :

(C) $\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \sin \frac{x_1-x_2}{2} \cos \frac{x_1+x_2}{2}$

(D) $\cos x_1 - \cos x_2 = -2 \sin \frac{x_1-x_2}{2} \sin \frac{x_1+x_2}{2}$

$\sin x_1 = \sin\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2) + \frac{1}{2}(x_1-x_2)\right) = \sin\textcircled{1}\cos\textcircled{2} + \sin\textcircled{2}\cos\textcircled{1}$

$\sin x_2 = \sin\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2) - \frac{1}{2}(x_1-x_2)\right) = \sin\textcircled{a}\cos\textcircled{2} - \sin\textcircled{2}\cos\textcircled{b}$

$\therefore \sin x_1 - \sin x_2 = a+b - a+b = 2b = \boxed{2\sin\frac{(x_1-x_2)}{2}\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}$

باستخدام العلاقات A , B والتعويض

$x_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$,

$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$

نحصل على العلاقات (C) , (D) .

نتيجة (٢) : بتعويض $x_2 = -x_1$ في العلاقة (B) نحصل على

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall\, x \in R$

نتيجة (٣) : من العلاقة (C) نجد أن لجميع قيم $x \in R$ فان

$|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

نظرية (٢) : لقيم x حيث $x \in (0,2)$ فان

(i) $\sin x > 0$, (ii) $\cos 2 < 0$

البرهان (i) : من التعريف

$$\sin x = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!} =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{x^{4r-3}}{(4r-3)!} - \frac{x^{4r-1}}{(4r-1)!}\right]$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^{4r-3}}{(4r-3)!}\left[1 - \frac{x^2}{(4r-2)(4r-1)}\right]$$

فاذا كانت $x \in (0,2)$ فان $x^2 < (4r-2)(4r-1)$ لقيم $r \in N$

اى ان المقدار بين القوسين بالطرف الايمن موجب دائما وبذلك يكون :

$\sin x > 0$ لجميع $x \in (0,2)$

$\cos x_1 = \cos\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2) + \frac{1}{2}(x_1-x_2)\right) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos x_2 = \cos\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2) - \frac{1}{2}(x_1-x_2)\right) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\therefore \cos x_1 - \cos x_2 = a - b - a - b =$

$$-2\sin\frac{(x_1+x_2)}{2}\cdot\sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$$

برهان (11): من التعريف واستخدام المتباينه

$$4 < (4r-1)4r \quad , \quad r \in \mathbb{N}$$

فان $$\cos 2 = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{2^{2r}}{(2r)!}$$

$$= 1 - 2 + \frac{2}{3} - \sum_{r=2}^{\infty}\left[\frac{2^{4r-2}}{(4r-2)!} - \frac{2^{4r}}{(4r)!}\right]$$

$$= -\frac{1}{3} - \sum_{r=2}^{\infty} \frac{2^{4r-2}}{(4r-2)!}\left[1 - \frac{4}{4r(4r-1)!}\right]$$

$$< 0$$

وهذا هو المطلوب اثباته.

نتيجه (٣) : يوجد عدد وحيد α بحيث $\cos\alpha = 0$, $\alpha \in (0,2)$

البرهان . من التعريف $\cos 0 = 1 > 0$ ومن النظرية $\cos 2 < 0$

ولان الدالـــه $\cos x$ داله متصله فيوجد عـــدد $\alpha \in (0, 2)$

يحقق العلاقه المطلوبه . اى ان $\cos\alpha = 0$.

نفرض ان هناك عـــددان α_1 ، α_2 يحققان العلاقة $\cos\alpha = 0$

بحيث $\alpha_1 < \alpha_2$ مثلا فان

$$\frac{\alpha_1 \pm \alpha_2}{2} \in (0, 2)$$

من نتيجه (١) نجد ان:

$$0 = \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 = -2\sin\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$$

$$> 0$$

ومن ذلك الفرض يوجد قيمتان للعدد α فرض خاطئ ونجد أن $\alpha_1 = \alpha_2$.

تعـــريف(٣) : العـــدد 2α حيث α هى العرفه فى النتيجه اللبقه يسمى π وينطـق (P_1)

نظـــريه(٣) : للدالـــة $\cos x$ ، $\sin x$

1. $\cos 0 = \sin \pi/2 = 1$, $\sin 0 = \cos \pi/2 = 0$,
   $\cos x > 0$, $\sin x > 0$ $\quad \forall\, x \in (0, \pi/2)$
2. $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, $\quad \cos x < 0$,
   $\sin x > 0$ $\quad \forall\, x \in (\pi/2, \pi)$
3. $\cos 3\pi/2 = 0$, $\quad \sin 3\pi/2 = -1$,
   $\cos x < 0$, $\quad \sin x < 0$ $\quad \forall x \in (\pi\ , 3\pi/2)$
4. $\cos 2\pi = 1$, $\quad \sin 2\pi = 0$,
   $\cos x > 0$, $\quad \sin x < 0$ $\quad \forall\, x \in (3\pi/2,\ 2\pi)$.

البرهان: باستخدام التعريف نجد ان (١) صحيحة لان:

$\cos 0 = 1$, $\quad \sin 0 = 0$, $\quad 0 < \pi/2 < 2$

$\cos \pi/2 = 0$, $\quad \cos x > 0$ $\quad \forall\, x \in (0, \pi/2)$

وكذلك يمكننا اثبات (4), (3), (2)

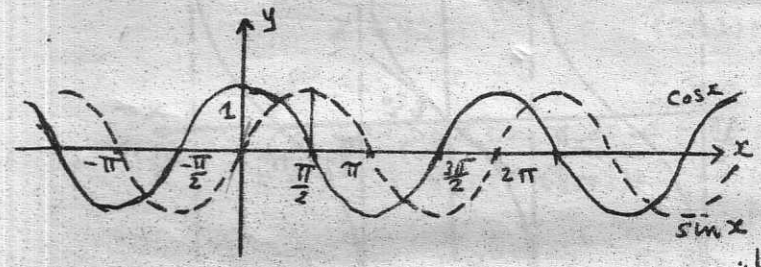
تعـــريف(٤) : الدالة f تسمى دالة دوريه ودورتها w اذا تحقق

(a) $x \in D(f) \quad \longleftrightarrow \quad x + w \in D(f)$

(b) $\forall\, x \in D(f) \quad ; \quad f(x + w) = f(x)$

تعريف (٥) : الدالتان $\sin x$, $\cos x$ دالتان دوريتان ولهما الدورة 2π .

باستخدام نظرية (٣) نستطيع رسم الدالتين كالاتى :



تعريف (٦) : الدالتان

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad ,$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

يحققان الخواص التاليه :

(١) $D(\tan) = \left\{ x \in R,\ x \neq \pm (\frac{2n-1}{2})\pi \ ,\ n \in N \right\}$

$D(\cot) = \left\{ x \in R,\ x \neq \pm n\pi \ ,\ n \in N \right\}$

٢) الدالتان $\tan$, $\cot$ دالتان متصلتان

٣) الدالتان $\tan$, $\cot$ دالتان فرديتان

٤) الدالتان $\tan$, $\cot$ دوريتان ولهما الدور π

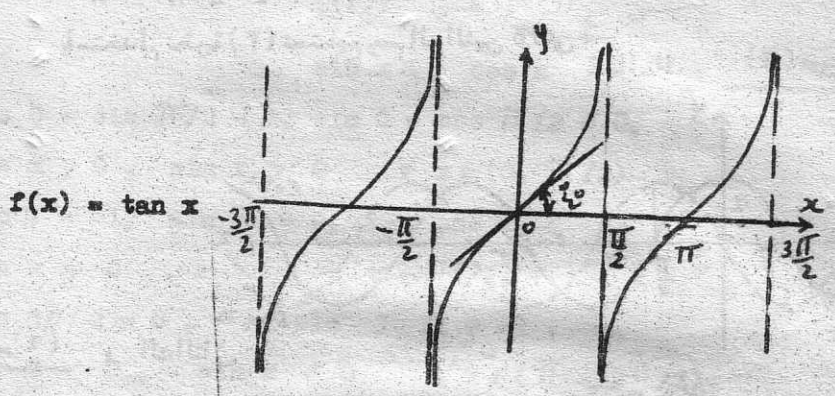
٥) الداله $\tan$ تزايديه فى الفتره $(-\pi/2, \pi/2)$ بينما الدالة $\cot$ تناقصية فى الفتـــــرة $(0, \pi)$

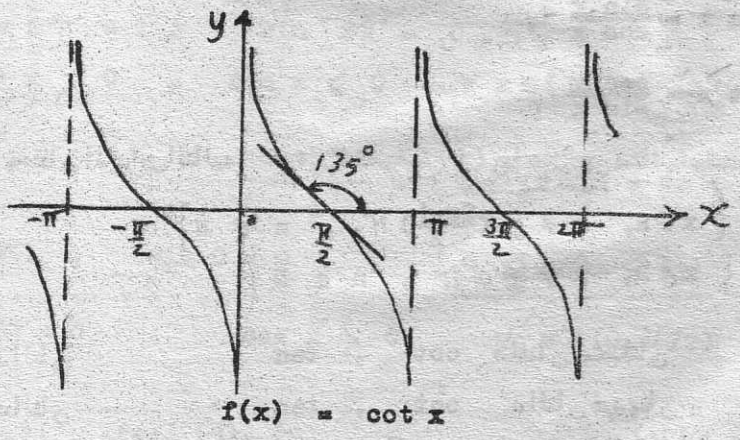
(٦) (a) $\tan \pi/4 = \cot \pi/4 = 1,$

(b) $\lim_{x \to \pi^-/2} \tan x = +\infty$, $\lim_{x \to -\pi^+/2} \tan x = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \cot x = +\infty$ ، $\lim_{x \to \pi^-} \cot x = -\infty$

من الخواص السابقة يمكن رسم الدالتين كالاتى





f(x) = cot x

تفاضل الدوال المثلثية :

نظرية (١) : اذا كانت $f(x) = \sin x$ فان $f'(x) = \cos x$

البرهان : نبرهن اولا :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

فاذا كانت $x \neq 0$

لا وضح أنه أقل من ١

$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ($x_0 = 0$)

لا وضح العلاقة بينها وبينه

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

فان

$$\sin x / x = \frac{1}{x} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r}}{(2r+1)!}$$

متسلسلة القوى

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r}}{(2r+1)!}$$

دالة متصلة لجميع قيم $x \in R$ ولذلك فان

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} P(x) = P(0) = 1$$

باستخدام الخاصية (A) فان

$$\sin (x_0 + h) - \sin x_0 = 2 \cos \frac{2x_0 + h}{2} \sin \frac{h}{2}$$

أيضا:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{2}{h} \cos \frac{2x_0 + h}{2} \sin \frac{h}{2} \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos \frac{2x_0 + h}{2} \lim_{h \to 0} \frac{\sin h/2}{h/2}$$

$$= \cos x_0$$

وذلك لان الدالة $\cos x$ دالة متصلة ومن ذلك نجد ان

$$\frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x$$

نظرية (٢) : اذا كانت $f(x) = \cos x$ فان $f'(x) = -\sin x$

البرهان: مثل نظرية (١).

برهان آخر للنظرية السابقة :

نظرية متسلسلة القوى $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ قابله للتفاضل لجميع قيم x ونجد ان

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ومن هذه النظريه فان

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}\right)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) \frac{x^{2r}}{(2r+1)!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r}}{(2r)!} = \cos x$$

مثال (١) : اثبت ان $\frac{d}{dx}(\tan g) = \frac{1}{\cos^2 g} \frac{dg}{dx}$

حيث g دالة قابله للاشتقاق.

$$\frac{d}{dx}(\tan g) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin g}{\cos g}\right) =$$

$$= \frac{\cos g \cos g \frac{dg}{dx} - \sin g (-\sin g \frac{dg}{dx})}{\cos^2 g}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 g} dg/dx.$$

مثال (٢) : اوجد مشتقه الداله الاتيه:

$$f(x) = \sin 3x + \cos 2x$$

$$f'(x) = \cos 3x \frac{d}{dx}(3x) - \sin 2x \frac{d}{dx}(2x)$$

$$= 3 \cos 3x - 2 \sin 2x.$$

مثال (٣): اوجد مشتقه الدالـة $f(x) = (\tan x)^2$

$\tan^2 x = (\tan x)^2$

عاده نكتب

فيكون

$$\frac{d}{dx}\tan^2 x = 2\tan x \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= 2\tan x \frac{1}{\cos^2 x}$$

مثال (٤): اوجد المشتقه الثانيه للدالـة $f(x) = x \sin x$

$$f'(x) = x\cos x + \sin x$$

$$f''(x) = x(-\sin x) + \cos x + \cos x$$

$$= -x\sin x + 2\cos x$$

مثال (٥): اوجد المشتقه الثانيه للدالـــة $f(x) = \tan^2(3x-2)$.

$$f'(x) = 2\tan(3x-2) \cdot \frac{1}{\cos^2(3x-2)} \cdot 3$$

$$= \frac{6\tan(3x-2)}{\cos^2(3x-2)}$$

$$f''(x) = \frac{36\tan^2(3x-2)}{\cos^2(3x-2)} + \frac{18}{\cos^4(3x-2)}$$

تمارين:

١) اوجد نهاية $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ ، $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

اوجد مشتقات الدوال الاتيه

٢) $f(x) = \sin x - x\cos x + x^2 + 3$

٣) $f(x) = \cos(1 - x^2)$

٤) $f(x) = \sin^3(2x - 3)$

٥) $f(x) = x^2 \sin x + 2x\cos x$

٦) $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

٧) $f(x) = \sin 2/x$

٨) اذا كانت $f(x) = \sin x + 2\cos x$ اثبت ان $f^{(3)} + f^{(2)} + f^{(1)} + f = 0$.

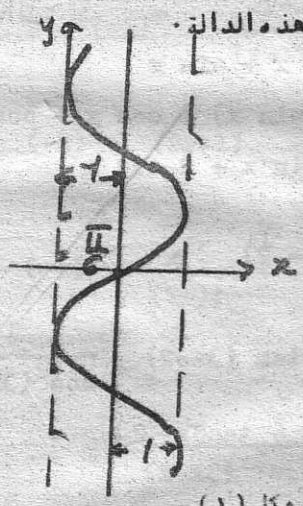
الدوال المثلثية العكسية :

تعريف: الدالة العكسية للدالة $\sin x$ في الفترة $(-\pi/2, \pi/2)$ هي الدالة $(\arcsin x)$ ونرمز لها بالرمز $\sin^{-1} x$ حيث

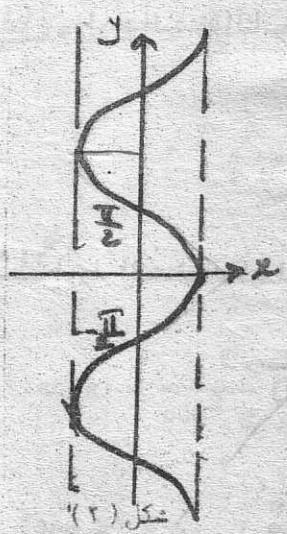
$$D(\sin^{-1}) = (-1, +1)\ ,$$

$$R(\sin^{-1}) = [-\pi/2, \pi/2]$$

والرسم (١) يوضح منحنى هذه الدالة.



شكل (١)



شكل (٢)

وكذلك الدالة العكسية للدالة $\cos x$ وتسمى $(\arccos x)$ ويرمز لها بالرمز $\cos^{-1}(x)$. والرسم (٢) يوضح منحنى هذه الدالة.

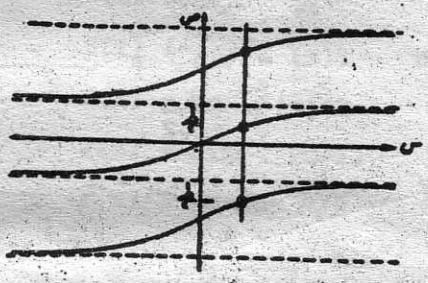
تعريف : الدالة العكسية للدالة $\tan x$ في الفترة $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ هي الدالة $(\arctan x)$ ويرمز لها بالرمز $\tan^{-1}x$ حيث

$$D(\tan^{-1}) = R \quad , \quad R(\tan^{-1}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

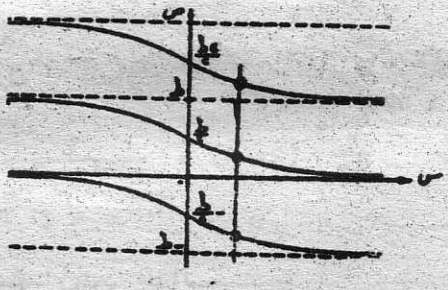
وكذلك الدالة العكسية للدالة $\cot x$ هي الدالة $(\operatorname{arc\,cot} x)$ ويرمز لها بالرمز $(\cot^{-1} x)$ حيث

$$D(\cot^{-1}) = R \quad , \quad R(\cot^{-1}) = (0, \pi)$$

والرسم التالى يوضح هاتين الدالتين:



الدالـــة $(\tan^{-1} x)$



الدالة $(\cot^{-1} x)$

فاضل الدوال المثلثية العكسية:

هى

نظرية: اذا كانـــــــــت $f(x) = \sin^{-1} x$ فان $|x| < 1$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

وبرهان: الدالـــة $\sin^{-1} x$ هى الدالة العكسية للدالة $\sin x$ فـــــى الفترة $(-\pi/2, \pi/2)$ فيكـــون $|\sin^{-1} x| < \pi/2$

لجميع قيـــم x بحيث $|x| < 1$

$\sin^{-1}x = y \Rightarrow x = \sin y$

اثبات:

$$\sin(\sin^{-1}x) = \cos(\sin^{-1}x)$$

$$= \sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)} = \sqrt{1-x^2} \neq 0$$

وباستخدام تفاضل الدالة العكسية نجد ان:

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$dy/dx = 1/dx/dy$

نظرية: اذا كانت $f(x) = \tan^{-1}x$ فان

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

البرهان: اذا كانت $y = \tan^{-1}x$ فان $x = \tan y$ حيث $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ فيكون

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{\tan'(\tan^{-1}x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\tan^{-1}x)}$$

$\cos^2[\tan^{-1}x]$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$

مثال (١): اوجد المشتقه الاولى للدالة:

$$f(x) = \sin^{-1}(2x-3)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(2x-3) = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}}$$

مثال (٢): اوجد المشتقه الاولى للدالة

$$f(x) = \tan^{-1}3x^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+(3x^2)^2} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{6x}{1+4x^4}$$

مثال (٣): اوجد المشتقه الاولى لـ

$$f(x) = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$f'(x) = x \cdot \tfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) + (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + a^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}} \cdot \frac{1}{a}$$

$$= 2\sqrt{a^2-x^2}$$

- (تمارين) -

أوجد مشتقات الدوال الاتيه :

١) $f(x) = \cos^{-1} x^2$

٢) $f(x) = \cot^{-1} \frac{1+x}{1-x}$

٣) $f(x) = x \sin^{-1} \frac{1}{x} + \sqrt{1-x^2}$

٤) $f(x) = \frac{1}{ab} \tan^{-1}(\frac{b}{a} \tan x)$

٥) $f(x) = \sin^{-1} 3x$

٦) $f(x) = \cos^{-1} \frac{1}{2}x$

٧) $f(x) = \tan^{-1} 3/x$

٨) $f(x) = \sin^{-1} (x-1)$

٩) $f(x) = x^2 \cos 2/x$

١٠) * $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \sin^{-1} \frac{x}{a}$

١١) * $f(x) = (x-a) \sqrt{2ax-x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x-a}{a}$

١٢) * $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^{-1} x}$

١٣) $\ln \cos x$, $\ln (\tan x^4)$, $\ln (1+\cos^3 x)$, $\ln \sqrt{\sin x}$

١٤) $\ln \frac{\sin x}{2-\cos x}$, $e^{\sin x}$, $3^{(-3x)}$, $4^{\sin x}$, $3^{\cot x}$, $2^{\sec^2 x}$

١٥) اذا كـــــــان $\ln \sin xy - e^{x+y} = 0$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$

١٦) اذا كـــــــان $(\sin x)^y = y^{\sin x}$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$

١٧) اذا كان $x^{\ln y} + y^{\ln x} = x + y$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$

١٨) اوجد المشتقه الاولى للـــدوال:

$\tan^{-1}(\cot x)$, $\tan^{-1} (\sqrt{x})$, $\cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$

Note: we that

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

this rule can be extended to any limited number

اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من المعادلات الاتيه:

١٩) $\sin my - \cos n x = a$

٢٠) $\sin^2 x + \cos^2 y = a^2$

٢١) $y \tan y = x$

٢٢) $\sin x \cos y = b$

٢٣) $\sin^2 x \cos^2 y = o$

٢٤) $xy - x \sec y - y \tan x = 16$

٢٥) اوجد المشتقه الاولى للدوال:

$(1 + x^2) \tan^{-1} x$, $x \cos^{-1} x$, $\sec^{-1}(\frac{1}{x})$, $\cos^{-1} x^3$

٢٦) اوجد المشتقه الاولى للدوال:

$\tan^2 5x \sec^3(3x-4)$, $\operatorname{cosec}^3 x . \sin \frac{x}{3}$, $\cos^3 3 x \tan \frac{2}{x}$.

٢٧) اوجد المشتقه الاولى للدالة:

$$\frac{8x}{x^3 + 4} + x - 4 \tan^{-1} \frac{x}{2}$$

٢٨) اوجد المشتقه الاولى للدوال

$x^{\sin x}$, $(\sin x)^x$, $(\sin x)^{\tan x}$

٢٩) اوجد المشتقه النونيه للدالة

$$y = \frac{3}{(x+1)(2x-1)}$$

٣٠) اذا كانـــت $y = \sec x$ فاثبت ان

$$y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2(3y^2 - 2) .$$

٣١) اثبت ان . اذا كانت $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ فـــان

$$-2 \frac{dy}{dx} \times \frac{d^3y}{dx^3} = 3 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

٣٢) اوجـــد $\frac{d^2y}{dx^2}$ من المعادلة $e^{\sin x} \cos y = 0$

٣٣) اوجد d^2y/dx^2 من المعادلة $e^x + e^y = e^{x+y}$

$\cos ix = \cosh x$, $\sin ix = i \sinh x$

$\cosh ix = \cos x$, $\sinh ix = i \sin x$

جـ- الدوال الزائديه والدوال الزائديه العكسية:

تعريف : باستخدام الداله الاسيه e^x نعرف الدوال الاتيه:

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $D(\sinh) = R$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $D(\cosh) = R$

$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $D(\tanh) = R$

$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $D(\coth) = R - \{0\}$

وتعرف هذه الدوال بالدوال الزائديه.

نظرية: للدوال فى التعريف السابق نجد أن:

1- $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

2- $R(\sinh) = R$,

$R(\cosh) = \{y \in R , y \geq 1\}$

$R(\tanh) = \{y \in R , |y| < 1\}$

$R(\coth) = \{y \in R , |y| > 1\}$

3- الدوال الزائديه دوال متصله

4- الداله cosh داله زوجيه بينما الداله sinh داله فرديه

5- $\sinh(x_1 + x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 + \sinh x_2 \cosh x_1$

$\cosh(x_1 + x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 + \sinh x_1 \sinh x_2$

٦) الدوال sinh , tanh في الفترة $(-\infty, +\infty)$ والدالة cosh في الفترة $[0, \infty)$ دوال تزايديه بينما الدالة coth في الفترة $(-\infty, 0)$ وفي الفترة $(0, \infty)$ دالة تناقصيه.

$y \to 1$ $\quad$ $y \to -1$

نتيجة (١): لكل عدد $x \in R$ فان

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

للدوال الزائدة يمكن تعريف الدوال الزائدية العكسية وهي

1. ar sinh = : $(\sinh^{-1})$, $D(\sinh^{-1}) = R(\sinh^{-1}) = R$

2. ar cosh = : $(\cosh^{-1})$, $D(\cosh^{-1}) = \{x \in R, \ x \geq 1\}$ (R)

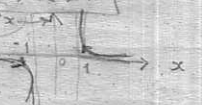
$$R(\cosh^{-1}) = \{y \in R, \ y \geq 0\}.$$

3. ar tanh = : $(\tanh^{-1})$, $D(\tanh^{-1}) = \{x \in R, \ |x| < 1\}$ i.e. $-1 < x < 1$

$$R(\tanh^{-1}) = R$$

4. ar coth = : $(\coth^{-1})$; $D(\coth^{-1}) = \{x \in R, \ |x| > 1\}$ i.e. $-1 > x > 1$

$$R(\coth^{-1}) = \{y \in R, \ y \neq 0\}$$



نظرية : باستخدام اللوغاريتمات نكتب الدوال الزائدية العكسية بالصورة الاتيه:

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad (2) \quad (1)$$

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\tanh^{-1} x = \tfrac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \qquad |x| < 1$$

$$\coth^{-1} x = \tfrac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1} \qquad |x| > 1$$

$y = \cosh^{-1} x \ \therefore x = \cosh y \Rightarrow x(e^y)^2 + x = (e^y)^2 - 1 \Rightarrow (1-x)(e^y)^2 = (1+x) \Rightarrow (e^y)^2 = \frac{1+x}{1-x}$

$\therefore y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$y = \coth^{-1} x \ \therefore x = \frac{\cosh y}{\sinh y} = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} \Rightarrow x(e^y)^2 - x = (e^y)^2 + 1 \Rightarrow (x-1)(e^y)^2 = (x+1)$

$\therefore y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

البرهان: نفرض ان: $x = \cosh y$

$$= \tfrac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \quad , \quad 0 \leq y < \infty$$

يحل هذه المعادله بالنسبه الى y

$$e^{2y} - 2x\,e^y + 1 = 0$$

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$y = \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad , \quad e^y \geq 1 \quad , \quad x \geq 1$$

وبنفس الطريقه يمكن اثبات باقي العلاقات.

تفاضل الدوال الزائديه:

نظرية: اذا كانت $f(x) = \sinh x$ فان f قابله للتفاضل عند جميع قيم x ويكون

$$f'(x) = \cosh x$$

البرهان:

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$= \cosh x$$

وبنفس الطريقه نستطيع ايجاد تفاضلات جميع الدوال الزائديه.

تفاضل الدوال الزائديه العكسية:

نظرية: اذا كانت $f(x) = \sinh^{-1} x$ فان f قابله للتفاضل عند جميع قيم x ويكون

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

البرهان:

نفرض ان $y = \sinh^{-1} x$

فيكون $x = \sinh y$

بتفاضل بالنسبه الـــى x فنحصل على

$$1 = \cosh y \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

مثال (١): اثبت ان:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x}) - \tfrac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})$$

$$= 1$$

مثال (٢): اوجد لمشتقه الدالـــة:

$$f(x) = \frac{1}{\sinh^2(x^2+1)} = \frac{1}{\sinh^2(x^2+1)}$$

let $z = \sinh(x^2+1)$ & $y = x^2+1$

$\therefore y = (z)^{-2}$ $\therefore$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} (\sinh (x^2+1))^{-2}$$

$$= -2(\sinh (x^2+1))^{-3} \cdot \cosh (x^2+1) \cdot 2x$$

$$= -4x \frac{\coth (x^2+1)}{\sinh^2(x^2+1)}$$

مثال (٣): اوجد مشتقه الداله:

$$f(x) = \ln \tanh 2x$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{\tanh 2x} (\tanh 2x)'$$

$$= \frac{1}{\tanh 2x} \times \frac{1}{\sinh 2x} \cdot 2 = \frac{4}{\sinh 4x}$$

$\cosh 2x$

Note:- $\sinh 2x = 2 \cdot \sinh x \cdot \cosh x$

مثال (٤): اثبت ان:

$$\operatorname{sech}^{-1}x = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

بفرض ان $y = \operatorname{sech}^{-1}x$ اى ان

$$x = \frac{1}{\cosh y}, \quad \cosh y = \frac{1}{x}$$

ومن ذلك ينتج ان:

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1}\frac{1}{x}$$

كذلك فان

$$x = \frac{1}{\cosh y} = \frac{2}{e^y + e^{-y}}$$

$$e^{2y} x - 2e^{y} + x = 0$$

وبحل هذه المعادله بالنسبه لـ e^y نجد ان

$$e^y = \frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}, \quad y \geq 0$$

وبأخذ لوغاريتمات الطرفين

$$y = \ln\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}, \quad y \times 1$$

مثال (٥): اوجد مشتقه الداله

$$f(x) = 2\tanh^{-1}(\tan \tfrac{1}{2} x)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = 2\frac{1}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x} \frac{d}{dx}(\tan \tfrac{1}{2} x)$$

$$= \frac{2}{1 - \tan^2 \frac{1}{2} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} x} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} x - \sin^2 \frac{1}{2} x} = \frac{1}{\cos x}$$

Leibniz's theorem on repeated differentiation :-

if u & v are functions of (x)

$$D^{(n)}(uv) = u_0 v_n + {}^nC_1 u_1 v_{n-1} + {}^nC_2 u_2 v_{n-2} + \cdots + {}^nC_r u_r v_{n-r} + \cdots + {}^nC_{n-1} u_{n-1} v_1 + u_n v_0$$

$\sin x = \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}}$ $\quad \cot = \frac{1}{\tan}$ & $\sec = \frac{1}{\cos}$ & $\text{Cosec} = \frac{1}{\sin}$

$\cos x = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}}$

جدول مشتقات الدوال الأساسية

	الدالة $f(x)$		المشتقة $f'(x)$
1.	c	(ثابت)	0
2.	x^{α}	$\alpha \in R$	$\alpha x^{\alpha-1}$
3.	$1/x$		$-1/x^2$
4.	$\sqrt{x}$		$1/2\sqrt{x}$
5.	e^x		e^x
6.	a^x		$a^x \log_e a$
7.	$\sin x$		$\cos x$
8.	$\cos x$		$-\sin x$
9.	$\tan x$		$1/\cos^2 x$
10.	$\text{cotan } x$		$-1/\sin^2 x$
11.	$\sin^{-1} x$		$1/\sqrt{1-x^2}$
12.	$\cos^{-1} x$		$-1/\sqrt{1-x^2}$
13.	$\tan^{-1} x$		$1/(1+x^2)$
14.	$\text{cotan}^{-1} x$		$-1/(1+x^2)$
15.	$\sinh x$		$\cosh x$
16.	$\cosh x$		$\sinh x$
17.	$\tanh x$		$1/\cosh^2 x$
18.	$\text{cotanh } x$		$-1/\sinh^2 x$
	$\text{Cosec } x$		$-\text{Cosec } x \cot x$
	$\text{Sec } x$		$\sec x \cdot \tan x$
	$\text{Sec}^{-1} x$		$1/x\sqrt{x^2-1}$
	$\text{Cosec}^{-1} x$		$-1/x\sqrt{x^2-1}$
	$\text{Sech } x$		$-\text{Sech } x \tanh x$
	$\text{Cosech } x$		$-\text{Cosech } x \coth x$

(1) $\text{Cosec } x = y = \frac{1}{\sin x}$

$\Rightarrow dy/dx = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x / \sin x$

(2) $\sec x = y = \frac{1}{\cos x}$

$dy/dx = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x / \cos x$

$\text{Cosec}^{-1} x = y \Rightarrow \text{Cosec } y = x = 1/\sin y$

$d \sin y = 1/x$

$\Rightarrow \sin^{-1} y = \sin^{-1} 1/x$

$\Rightarrow dy/dx = \frac{-1}{x^2\sqrt{1-(1/x)^2}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\text{Sec}^{-1} x = y$

$\Rightarrow \sec y = x = \frac{1}{\cos y}$

$\Rightarrow \cos^{-1} 1/x = y$

$\Rightarrow dy/dx = \frac{-1x^{-1}}{x^2\sqrt{1-(1/x)^2}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

تابع مشتقات الدوال الاساسيـــــة

	الدالـــة f(x)	المشتقه $f'(x)$
19.	$\sinh^{-1} x$	$1/\sqrt{1+x^2}$
20.	$\cosh^{-1} x$	$1/\sqrt{x^2-1}$
21.	$\tanh^{-1} x$	$1/(1-x^2)$ $\quad x^2<1$
22.	$\text{cotanh}^{-1} x$	$-1/x^2-1$ $\quad x^2>1$

باستخدام هذا الجدول والنظريات الوارده فى الباب الثالث يمكن ايجاد مشتقه أى دالـــة ناتجـة من الدوال المعرفه سابقا بواسطه العمليات الحسابيه المختلفه وكذلك عليه التركيب مع مراعاه المناطق التى تصلح فيها اجراء عمليتى القسمه والتركيب.

مثال (١): اوجد مشتقه الدالـــــة $f(x) = \ln \sin x$

نفرض ان $u = \sin x$ فيكون $f(x) = \ln u$

وباستخدام تفاضل الداله التركيبيه نحصل على

$$f'(x) = (\ln u)' \cdot u'(x) = \frac{1}{u} \cdot \cos x$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cos x = \text{cotan } x .$$

مثال (٢): اوجد مشتقه الداله $f(x) = e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$

نبدأ بتوضيح $u = \frac{1}{x}$, $v = \sin^2 u$ فنحصل على

$f(x) = e^v$ وباستخدام تفاضل الداله التركيبيه

$$f'(x) = e^v (v)' = e^v \, 2 \sin u \cos u \cdot u'$$

$$= e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

تمـــــارين :

اوجد المشتقه الاولى للدوال الاتيه بالنسبه الى : x .

1. $\sin 4x$, $\sin (ax + b)$, $\cos (x/m)$, $\cos (nx)$.
2. $\tan \sqrt{x}$, $\operatorname{cotan} 3x$, $\operatorname{cotan} \sqrt{\pi/3 - 2x}$
3. $\sqrt{3 + 4 \cos x}$, $\tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x$
4. $\frac{1 + 2 \sin x}{1 - 2 \sin x}$, $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$, $(a + b \sin^2 x)^n$
5. $f(x) = \cos^3 3x \cdot \tan (2/x)$, $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos (\frac{1}{3}x)}$
6. $\sin^{-1}(\frac{x}{5})$, $\cos^{-1} x^4$, $\cos^{-1} (\frac{1}{\sqrt[3]{x}})$.
7. $\tan^{-1} (\cot x)$, $\tan^{-1} (\frac{x^2}{5})$, $\operatorname{cotan}^{-1} (x + 2)$.
8. $f(x) = \sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x$, $f(x) = \sin^{-1} (\sqrt{1 - x^2})$
9. $\cos^{-1} (\frac{1-x^2}{1+x^2})$, $f(x) = \frac{8x}{x^3+4} + x - 4 \tan^{-1}(\frac{x}{2})$.
10. e^{2x} , e^{x^2} , $e^{\cos x}$, $e^{\tan x}$
11. $x^3 e^{3x}$, $e^{\alpha x} \cdot \sin 3x$, $\sin 5x . e^{-5x}$.
12. a^{x^3} , $e^{ax} \sin 3x$, $\sin 5x . e^{-5x}$. 3^{2-x} , $4^{\sin x}$, $2^{\sqrt{x}}$.
13. e^x / a^x , $e^{\sin x}$. 3^{-3x}
14. $\ln (2x)$, $\ln (2x^2 + 1)$, $\ln (a + 2x^2)$.
15. $x^2 \ln x$, $\frac{1}{x} \ln x$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \ln x$
16. $\ln (\frac{x(1-x)}{(3-x)^2})$, $\ln \sqrt[n]{1 - x^2}$, $\ln \sqrt{\sin x}$.
17. $x^{\frac{1}{x}}$, $(1-x)^{x^2}$, $(1 + x)^{x^2}$
18. $3x^{(x^2+3)}$, $(\frac{1}{x})^{\sqrt{x}}$, $(x + 1)^{e^x}$

19. $(\sin x)^x$, $\dfrac{x^3\sqrt{1+\ln x}}{(2+x)^4}$, $x^{\sin x}$

20. $\sinh 3/2\ x$, $\sinh \sqrt{x}$, $\sinh x^2$

21. $\sinh x + \frac{1}{2}\sinh x^2$, $\cosh(3+5x)$, $\tanh\left(\frac{x}{5}\right)$

22. $\sqrt{\cosh x}$, $\ln\cosh x$, $\tan^{-1}(\tanh x)$.

23. $\sinh^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$, $\cosh^{-1}\left(\frac{x^2}{9}\right)$, $\operatorname{cotanh}^{-1} 2x$

24. $\tanh^{-1}x + \tan^{-1}x$, $\tanh^{-1}\sqrt{x}$

25. $f(x) = \tanh^{-1}\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2} + \tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$

26. $\tanh^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \ln x$ اثبت ان

27. $\frac{d}{dx}(e^{2x}\sinh x\cosh x) = \frac{d}{dx}(e^{4x}/4)$ اثبت ان

28. $\frac{d}{dx}(e^x\cosh x) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}e^{2x})$

29. $f(x) = \dfrac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ ازا كانت

$(1-x^2)f'(x) = x f(x) + 1$ فاثبت ان

وبالتفاضل ن من المرات اثبت ان

$(1-x^2)f^{(n+1)} - (2n+1)x f^{(n)} - n^2 f^{(n-1)} = 0.$

30. فاثبت ان $f(x) = (\sinh^{-1}x)^2$

ازا كانت

$(1+x^2)f^{(2)} + x f^{(1)} = 2$ ومن ثم اثبت ان

$(1+x^2)f^{(n+2)} + (2n+1)x f^{(n+1)} + n^2 f^{(n)} = 0$

31. $f(x) = a\cos\ln x + b\sin\ln x$ ازا كانت

$x^2 f^{(2)} + x f^{(1)} + f = 0.$ فاثبت ان

٣٢) اذا كانت $y = x^n a^x$ فاوجد المشتقه النونيه لـ y.

٣٣) اذا كانت $y = \sinh (m \sinh^{-1} x)$ فاثبت ان

$$(1 + x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = m^2 y$$

واثبت ان ايضا

$$(1 + x^2) y_{n+2} + (2n + 1) x y_{n+1} + (n^2 - m^2) y = 0.$$

٣٤) اذا كانت $y = (\sinh^{-1} x)^2$ فاثبت ان

$$(1 + x^2) y_2 + x y_1 = 2$$

ثم اثبت ان $(1 + x^2) y_{n+2} + (2n + 1) x y_{n+1} + n^2 y_n = 0$

٣٥) اوجد المشتقه النونيه للدوال.

$(x^2 + 1) e^{3x}$, $x^3 \ln x$

$x^3 e^{-2x}$, $x^2 \sin 2x$

٣٦) اذا كانت $y^{\frac{1}{m}} + y^{-\frac{1}{m}} = 2x$ فاثبت ان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm my}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

ثم فاضل هذه المعادله $n+1$ من المرات.

- التمثيل البارامترى للمنحنيات:

المعادلات البارامترية : اذا اعتبرت الاحداثيات (x, y) لنقطه ما على المنحنى على شكل دالتين لمتغير ثالث او بارامتر u $x = g(u)$, $y = f(u)$ فاننا نسمى المعادلتين $x = g(u)$, $y = f(u)$ المعادلتين البارامتريتين للمنحنى.

مثال (١):

القطع المكافئ $4x^2 + y = 4$ له المعادلتان البارامتريتان $x = \cos\theta$, $y = 4\sin^2\theta$ بدلالة البارامتر θ.

مثال (٢): في المثال السابق نستطيع استخدام بارامتر آخر يتحقق بـ $x = \frac{1}{2}t$, $y = 4 - t^2$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/du}{dx/du}$$ والمشتقة الاولى $\frac{dy}{dx}$ تعين بالقانون

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{du}{dx}$$ والمشتقة الثانية

مثال (٣):

اوجد $\frac{d}{dx}(y)$, $\frac{d^2}{dx^2}(y)$ اذا كان $x = \theta - \sin\theta$, $y = 1 - \cos\theta$

اولا: $\frac{dy}{d\theta} = \sin\theta$, $\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta$ فتكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} \qquad \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right).\frac{d\theta}{dx} = \frac{\cos\theta - 1}{(1-\cos\theta)^2} \cdot \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

$$= \frac{-1}{(1 - \cos\theta)^2}$$

تمارين:

اوجد $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمنحنيات الاتيه:

1) $x = 2 + t$, $y = 1 + t^2$

2) $x = t + 1/t$, $y = t + 1$

3) $x = 2\sin t$, $y = \cos 2t$

4) $x = \cos^3\theta$, $y = \sin^3\theta$

5) $x = a(\cos\phi + \phi\sin\phi)$, $y = a(\sin\phi - \phi\cos\phi)$.

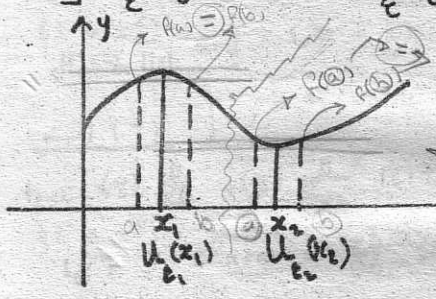
الفصل السادس

القيم العظمى والصغرى

تعريف: اذا كانت f داله معرفه فى الفترة (a,b) فانه يقال ان الداله f لها قيمة عظمى (صغرى) محليه عند النقطة $x_0 \in [a,b]$

اذا كان:

$$\exists\ \mathcal{U}_\varepsilon(x_0);\quad \forall\ x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0),\quad f(x) \leq f(x_0)\ \ (f(x) \geq f(x_0))$$



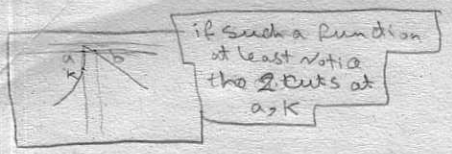
فى الشكل فالداله لها عند x_1 قيمة عظمى محليه وعند x_2 قيمة صغرى محلية.

نظرية: اذا كانت $f(x)$ قابله للتفاضل فى الفترة (a,b) ولها عند النقطة $x_0 \in (a,b)$ قيمة عظمى او (صغرى) محلية فان $f'(x_0) = 0$.

البرهان: لنفرض ان x_0 نقطة قيمه عظمى للدالة f. اذن يوجد جوار $\mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ بحيث ان لكل $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ فان $f(x) \leq f(x_0)$ ، ولان الداله قابله للتفاضل عند x_0 فنجد ان

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \longrightarrow f'(x_0) \qquad x \to x_0$$

والبسط فى الطرف الايسر سالب دائما فى الجوار $\mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ سواء كانت $x > x_0$ او $x < x_0$ وفى الحالة الاولى فان الطرف الايسر سالب وبالتالى النهاية $f'(x_0)$ غير موجبة. وفى الحالة الثانيه يكون الطرف الايسر موجبا وتكون النهايه بالتالى غير سالبه، اى ان $f'(x_0)$ غير موجبه وغير سالبه. اذن فهى تساوى الصفر.



Notice the Connection between Rolle's theorem and the last one

نظرية رول : اذا كانت f دالة قابلة للتفاضل فى الفترة $[a,b]$ وكان $f(a) = f(b) = c$ فانه توجد نقطة $x_0 \in (a,b)$ بحيث $f'(x_0) = 0$.

البرهان : اذا كانت $f(x) = c$ أى ثابتة عند جميع النقط فان النظرية واضحة لانه عند جميع النقط فى الفترة (a,b) يكون $f'(x) = 0$. اما اذا كانت f ليست ثابتة فلابد ان توجد نقطة داخليه α فى الفترة (a,b) بحيث ان $f(\alpha) = \sup\{f(x)\}$ اونقطة β فى الفترة (a,b) بحيث ان $f(\beta) = \inf\{f(x)\}$ وعند هاتين النقطتين ستوجد قيمه عظمى محليه او قيمه صغرى محليه (على الترتيب) بناء على النظرية السابقة فان $f'(\alpha) = 0$, $f'(\beta) = 0$.

Look at the fig. on the right

المعنى الهندسى لهذه النظريه هو ان اذا كان المستقيم الواصل بين النقطتين $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ افقيا فانه توجد نقطة $x_0 \in (a, b)$ بحيث ان المماس عند ها يكون ايضا افقيا.

نظرية لاجرانج للقيمة المتوسطة :

اذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل فى الفترة $[a,b]$ فانه توجد نقطة $x_0 \in (a,b)$ بحيث ان

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) \quad (1)$$

(2) the tangent at (x_0) is parallel to the tangent between $(a, f(a))$ & $(b, f(b))$

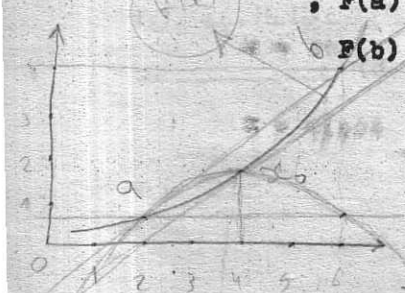
Note (1) = $\frac{AB}{BC}$ all we want is the slope between the 2 points which is equal to the slope at x_0

البرهان : لنعتبر الدالة

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

هذه الدالة متصلة وقابلة للتفاضل فى الفترة $[a,b]$.

ايضا يتضح ان $F(a) = f(a)$, $F(b) = f(a)$



أى أن هذه الدالة تحقق شروط نظرية رول وبالتالى توجد نقطة :

$x_0 \in (a , b)$ بحيث ان :

$$F'(x_0) = 0$$

لكن
$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

أى أن

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

وهو المطلوب.

اذا وضعنا $b = a + h$ فان x_0 يمكن وضعها على الصورة $x_0 = a + \theta h$ حيث $0 < \theta < 1$ والعلاقة السابقة تصبح على الصورة :

$$f(a + h) = f(a) + h f'(a + \theta h)$$

نظرية كوشى للقيمة المتوسطة :

اذا كانت الدالتان f , g قابلتين للتفاضل فى الفترة $[a,b]$ وكان $g'(x) \neq 0$ فى هذه الفترة فانه توجد نقطة $x_0 \in (a,b)$ بحيث ان :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

البرهان : من الفرض ان $g'(x) \neq 0$ فان $g(a) \neq g(b)$

لنعتبر الدالة :

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a))$$

هذه الدالة قابلة للتفاضل فى الفترة (a,b) وايضا فان

$$F(a) = f(a) \quad , \quad F(b) = f(a)$$

اى ان هذه الدالة تحقق شروط نظرية رول ولذلك توجد نقطة $x_0 \in (a , b)$ بحيث ان $F'(x_0) = 0$ اى ان

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_0) = 0$$

ومنه ينتج أن :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Using Taylor's theorem at $x = C+h$ and $x_0 = C$ and using the expansion we get L'Hôpital's rule

الصيغ غير المحددة :

أولا : الصيغة $\frac{0}{0}$:

قاعدة لوبيتال : اذا كان a عددا ما وكانت الدالتان $f(x)$, $g(x)$ قابلتين للتفاضل وكانت $g(x) \neq 0$ لجميع قيم x بحيث $x \in$ لما (a) ⇒

وكانت $\lim_{x \to c} f(x) = 0$, $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ فان

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

اذا كانت النهايه في الطرف الايمن موجوده .

مثال (١) : اوجد نهايه الدالة $\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$.

هذه دالة من الصيغة $\frac{0}{0}$ اي ان

$$\lim_{x \to 3} \frac{\frac{d}{dx}(x^4 - 81)}{\frac{d}{dx}(x - 3)} = \lim_{x \to 3} 4x^3 = 108$$

فيكون

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = 108.$$

ثانيا : الصيغة $\frac{\infty}{\infty}$:

بوضع $f(x)$ بدلا من $g(x)$, $g(x)$ بدلا من $f(x)$ نستطيع استخدام قاعدة لوبيتال في حالة ان البسط والمقام كلاهما له النهاية ∞ .

مثـــال (٢) : اوجد النهايـة $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$ هذه من الصورة $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

وكذلك يمكننا استخـدام لوبيتال لجميع الصيغ الاخـــرى $0 . \infty$, $\infty - \infty$, ∞_1 , ∞^0 , 0^0 باستخدام بعض التغيـرات المناسبه والتى تتضح مـــن الامثله :

مثـــال (٣) : اوجد النهاية $\lim_{x \to 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x})$, $\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}) = \lim_{x \to 0} \frac{(x - \sin x)}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)}{\sin x + x \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2-0} = 0.$$

مثـال (٤) : اذا كانـــت $y = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 6x + 8$ اوجـــد

أ ـ النقطه التى عندها $y' = 0$ وهى تعرف بالنقط الحرجة للدالـــــــة

ب ـ فترات التى تتزايد فيها الداله وفترات تناقصها .

جـ ـ القيم العظمى والصغرى للداله .

أولا : أ ـ $y' = x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

بوضع $y' = 0$ نجد ان القيم الحرجة هـى $x = -3, 2$

والنقطتان الحرجتان همـــا $(2, 2/3)$, $(-3, 43/2)$

ب ـ عند ماتكون y' موجبه فان y تتزايد وعند ماتكـــــــون y' سالبه فـــان y تتناقص . اذا كانـــت $x < -3$ فـــان $y' = (-)(-) = +$ اى ان y تتزايد لقيم $x < -3$

How to solve Ex. 6 :-

1) The mean value theory is applied. 2) we chose the required function.
3) we put suitable values for h, a, θ (actually it is).
4) Through the inequalities we have, we get a new inequality or anything else that connects us with the required relation / inequality.

وعندما $-3 < x < 2$ فان الداله $y' = (+)(-) =$ وبالتالى y تتناقص

واذا كانت $x > 2$ فان $y' = (+)(+) =$. فان y متزايده.

جـ - لقيم $x > -3$ فان الداله y تتناقص . ولقيم $x < -3$ فان y متزايده. اى ان الداله تغير من + الى - عند مرورها بالقيم $x = -3$ فتكون النقطه $(-3, 43/2)$ نقطه عظمى والقيم العظمى للداله هى $43/2$ ، وعند النقطه $(2/3 , 2)$ توجد نهايه صغرى وبالتالى القيمه الصغرى للداله هى $2/3$.

مثال (٥): حدد مواضع نقط القيم العظمى والصغرى المحليه للداله

$$f(x) = x^2 e^x$$

$$f'(x) = 2x e^x + x^2 e^2 = x e^x (2 + x)$$

تعيين مواضع النقط الحرجه $f'(x) = 0$

$$x = -2 , \quad x = 0$$

عند $x = -2$ تتغير اشاره $f'(x)$ من الموجب الى السالب اى ان للداله قيمه عظمى عند $x = -2$.

عند $x = 0$ تتغير اشاره $f'(x)$ من السالب الى الموجب اى ان للداله قيمه صغرى محلية عند $x = 0$.

مثال (٦) : استخدم قانون القيمه المتوسطه لتبين ان

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

عندما $-1 < x < 0$ ، وعندما $x > 0$

من نظرية القيمة المتوسطه $f(a+h) = f(a) + h f'(a + \theta h)$

حيث $0 < \theta < 1$

بوضع $a = 1$, $h = x$ فى هذه الصيغة , $f(x) = \ln x$

نجد ان:

this means $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
since $x_0 = a + \theta h$
$a = 1, h = x$
$f'(x_0) = \frac{1}{1+\theta x}$

$$\ln(1+x) = \ln 1 + x \frac{1}{1+\theta x} \quad (1)$$

$$= \frac{x}{1+\theta x}, \quad 0 < \theta < 1$$

عند $x > 0$ فان $1 < 1 + \theta x < 1 + x$ ومن ذلك فان $0 < \theta x < x$

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+\theta x} < 1 \quad , \quad \frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\theta x} < x$$

من العلاقة (١) نجد ان $\ln(1+x) = \frac{x}{1+\theta x}$

اى ان :

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

عند $-1 < x < 0$ نجد ان

$$1 > 1 + \theta x > 1 + x$$

اى ان : $(f(x) = x \ln(1+x)$, $0 < \theta < 1$, $-1 < x < 0$, $0 > \theta x > x$, $1 > 1+\theta x > 1+x$

$$1 < \frac{1}{1+\theta x} < \frac{1}{1+x}$$

فيكون

$$x > \frac{x}{1+\theta x} > \frac{x}{1+x}$$

$$x > \ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$$

تمارين : [لاحظ انه مفهوم ضمنا من المسائل يقوم فيها الطالب بحل طريقته مفاتيحه]

١) اثبت انه اذا كان $0 < x < \pi/2$ فان $\sin x > \frac{2}{\pi} x$.

٢) اثبت ان $\lim_{x \to 0} x^{\alpha} \ln x = 0$, $\alpha > 0$

٣) اثبت ان $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$, $\alpha > 0$

٤) استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبرهن ان $\sin x < x$ عندما $x > 0$.

٥) استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبرهن ان :

(أ) $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x$ لقيم $x > 0$

(ب) $x < \sin^{-1} x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ لقيم $0 < x < 1$

٦) احسب قيمة $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$ ، $\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2}$

$\lim_{x \to \pi^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x - \pi}}$ ، $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$ ٧) احسب قيمة

٨) احسب قيمة $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \tan x}$

٩) احسب قيمة $\lim_{x \to 1} x^{1/(x-1)}$

١٠) احسب قيمة $\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi^-} (\tan x)^{\cos x}$

١١) احسب $\lim_{x \to 0} \frac{e^x(1-e^x)}{(1+x)\ln(1-x)}$

١٢) للمنحنى $y = xe^x$ بين ان النقطة $(-1, -1/e)$ هى نقطة قيمة صغرى محليه وان النقطة $(-2, -2/e^2)$ هى نقطة انعطاف.

١٣) ادرس المنحنيات الاتيه فى الفترة $0 < x < 2\pi$.

a) $y = \frac{1}{2} \sin 2x$ ، b) $y = \cos^2 x - \cos x$

c) $y = x - 2 \sin x$ d) $y = \sin x (1 + \cos x)$.

١٤) اوجد القيم العظمى والصغرى للمنحنى

$$y = x^{4/3} (1 - x)^{1/3}$$

١٥) اثبت ان $\lim_{x \to \infty} (1-e^{-x})^{e^x} = 1/e$

١٦) اثبت ان $\lim_{x \to 1} x^{\tan \frac{1}{2}\pi x} = e^{-2/\pi}$.

Notice The process of choosing (x_0) to make the Solution possible. ← V.Imp

الفصل السابع
تقريب الدوال بواسطة كثيرات الحدود

اذا كانت الدالة f قابله للاشتقاق فان يمكن كتابه نظريه لاجرانج للقيمه المتوسطه كالاتى :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(c)$$

حيث $x > c > x_0$

$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$?

نظرية تيلور : اذا كانت الدالة f قابله للتفاضل $(n+1)$ من المرات فى الفترة (a,b) وكانت $x \in (a,b)$, $x_0 \in (a,b)$ فان

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x, x_0)$$

حيث $R_n(x, x_0)$ هى الباقى ويعين بالعلاقه

$$R_n(x, x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

حيث $x_0 < c < x$.

البرهان: الداله

$$\phi(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (*)$$

If $x = x_0$ then $\phi(x_0) = f(x_0) - f(x_0) + 0 + \dots + 0 = 0$

قابله للتفاضل $(n+1)$ من المرات ونجد ان

$$\phi(x_0) = \phi'(x_0) = \dots = \phi^{(n)}(x_0) = 0$$

$$\phi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

نعرف ايضا الدالة $\psi(x) = (x-x_0)^{n+1}$ فنجد ان

$$\psi(x_0) = \psi'(x_0) = \dots = \psi^{(n)}(x_0) = 0$$

$$\psi^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

i.e. at the $(n+1)$ derivation of the L.H.S & R.H.S of (1) we find (2) is true

Notice that interderivation of the R.H.S makes the factors after $f(x)$ vanish by derivation of the order that is related to the (Factor's order + 1) & N.B. $f(x_0)$ is of order zero ⇒ it vanishes after (1) derivation, etc.

note: from Cauchy $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ ∴ $b-a=h$ & $x_0=a+\theta h$

here(c) is for(x_0) & (x_0) for(b) & (x_0) for(a)

∴ $h = x-x_0$ & $C = x_0+\theta(x-x_0)$ & here θ depends on a, b, x_0

& here θ depend on x_0, x, C

باستخدام نظرية القيمه المتوسطه لخارج القسمة: (n+1) من المرات نحصل

على

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)} = \frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\phi'(x_0+\theta_1(x-x_0))}{\psi'(x_0+\theta_1(x-x_0))}$$

the part $\theta_1(x-x_0)$ is $\theta_1 h$

$$= \frac{\phi'(x_0+\theta_1(x-x_0)) - \phi'(x_0)}{\psi'(x_0+\theta_1(x-x_0) - \psi'(x_0)} = \dots$$

∴ $x_0+\theta_1(x-x_0)-x_0 = \theta_1(x-x_0)$ & for b-a=h

$$= \frac{\phi^{(n)}(x_0+\theta_n \dots \theta_2\theta_1(x-x_0)) - \phi^{(n)}(x_0)}{\psi^{(n)}(x_0+\theta_n \dots \theta_2\theta_1(x-x_0)) - \psi^{(n)}(x_0)}$$

and for (x_0) the Cauchyian

we have the Taylorian

$x_0+\theta_2[\theta_1(x-x_0)]$

$$= \frac{\phi^{(n+1)}(x_0+\theta_{n+1}\theta_n \dots \theta_2\theta_1(x-x_0))}{\psi^{(n+1)}(x_0+\theta_{n+1}\theta_n \dots \theta_2\theta_1(x-x_0))}$$

$$(*) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\alpha(x-x_0))}{(n+1)!} = \frac{\phi(x)}{(x-x_0)^{n+1}\psi(x)}$$

ومن ذلك ينتج ان: $R_n(x, x_0) = \phi(x)$ $\{C = x_0+\alpha(x-x_0)\}$

∴ from (*) putting the R.H.S factors that lie after f(x) on the L.H.S and replacing $\phi(x) = (*)$ we get Taylor's theorem

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}$$

وهو المطلوب اثباته.

مثال (١):

الدالـــــه $f(x) = e^x$ قابله للتفاضل اى عدد من المـــرات

وبالتالى يمكن كتابه مفكوك تيلور من اى رتبه بالصورة الاتيه:

i.e. $x_0=0$ ∴ $f^{(n)}(x_0) = (e^{x_0})^{(n)} = 1$

$$e^x = \sum_{0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,e^x$$ & $R_n(x,0)$

وهذا يمثل مفكوك الدالـــــة e^x عنـــد نقطه $x = 0$ حيث $0 < \theta < 1$

نظـــرية: اذا وجد عـــدد موجـــب c بحيث ان

$$|f^{(n)}(x)| < c \qquad \forall x \in [-a,a] \;,\; n \in N$$

فان الباقي R_n للدالة $f(x)$ يؤول الى الصفر عندما $n \to \infty$ وبالتالي فان الدالة تكتب على صورة متسلسلة لانهائية لقوى x.

$$f(x) = f(o) + \frac{x}{1!} f'(o) + \frac{x^2}{2!} f''(o) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(o) + \ldots$$

i.e. $x_0 = 0$

البرهان: wanted

الباقي R_n يعين من

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\theta x), \quad o < \theta < 1$$

$$|R_n| \leq c \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

$|f^{(n)}(x_0)| < c \quad \forall x \in [a, -a]$ & $n \in W$

$$\lim_{n \to \infty} |R_n| \leq c \lim_{n \to \infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

وهو المطلوب.

مثال: الدالة $f(x) = \sin x$ مشتقتها النونيه في أي فترة $[-a, a]$ هي $\sin(x + n\pi/2)$ وبالتالي فان

$$|f^{(n)}(x)| = \sin(x + n\pi/2) \leq 1 \quad \forall n \in N$$

to any (n) order we want i.e for approximation

$x_0 = 0$

أي أن الباقي في هذه الحالة يؤول الى الصفر.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

تمارين:

اثبت ان:

Notice — V. Imp.

the Process of choosing a key function of Maclo which are familiar in use to take us to solve the required function

1. $x e^x = \sum_1^\infty \frac{n}{n!} x^n$
2. $\sum_1^\infty \frac{n}{n!} = e$ at $x_0 = 0$ & $x = 1$
3. $(x^2 + x)e^x = \sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} x^n$ at $x_0 = 0$
4. $\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} = 2e$. at $x_0 = 0$ & $x = 1$

② − ① $= \sum_1^\infty \frac{n-1}{n-1} = e$

الفصل الاول

التكامل غير المحدود

١ - مفهوم التكامل غير المحدود :

درسنا في الجزء الاول طرق ايجاد مشتقه أى داله قابله للتفاضل ورمزنا لهذه النتيجه بالرمز

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

وعلمنا انه يمكننا كتابه ذلك ايضا على الصورة

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

فاذا كانت الداله المعلومه هى $f'(x)$ والداله المطلوب تعيينها هى الداله $f(x)$ سميت العمليه الحسابيه فى هذه الحاله بعملية التكامل ويستخدم لها الرمز:

$$\int f'(x)\,dx$$

وتسمى الداله $f(x)$ مضاد المشتقة $f'(x)$.

مثلا اذا كانت $f'(x) = 3x^2$ فان $df(x) = 3x^2dx$

وبذلك نحصل على $f(x) = \int 3x^2dx = x^3$

ولان $(x^3)' = (x^3 + c)'$

$$\int f'(x)\,dx = f(x) = f(x) + c$$

اى انه اذا كانت

$$\int f'(x)\,dx = f(x)$$

فان

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c$$

صحيحة ايضا حيث c مقدار ثابت.

وبذلك تكون كل داله قابله للتكامل لها عدد كبير من مضادات المشتقه وكل منها يختلف عن الاخر بمقدار ثابت.

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad ,$$

$$\int e^{2x} \, dx = \tfrac{1}{2} e^{2x} + c \quad ,$$

$$\int \frac{dx}{1+x} = \ln |1+x| + c$$

ويمكن التأكد من صحة هذه التكاملات بايجاد مشتقه الداله الناتجة من الطرف الايمن فنحصل على الداله القابله للتكامل الموجوده بالطرف الايسر.

فمثلا :

$$\frac{d}{dx}(\sin x + c) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\tfrac{1}{2} e^{2x} + c) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} e^{2x} = e^{2x}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln (1+x) + c) = \frac{1}{1+x}$$

اى أن الحالات البسيطه للتكاملات يمكن الحصول عليها من عكس جدول التفاضلات السابق فى الجزء الاول . فنحصل على

1. $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \qquad n \neq -1$

وذلك لان $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c \quad , \quad (\ln |x|)' = \frac{1}{x}$

3. $\int e^x \, dx = e^x + c \quad , \quad (e^x)' = e^x$

4. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad , \quad \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

6. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

**7. $\int \tan x\,dx = (-\ln|\cos x| + c)$

**8. $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$

9. $\int dx/\cos^2 x = \tan x + c$

10. $\int dx/\sin^2 x = -\cot x + c$

11. $\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$

12. $\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$

**13. $\int \tanh x\,dx = \ln \cosh x + c$

**14. $\int \coth x\,dx = \ln \sinh x + c$

15. $\int dx/\cosh^2 x = \tanh x + c$

16. $\int dx/\sinh^2 x = -\coth x + c$

17. $\int dx/(a^2 + x^2) = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$

18. $\int dx/(a^2 - x^2) = \underset{[1]}{\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}} + c = \underset{[2]}{\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}} + c$, $|x| < a$

$$\frac{1}{2a}\cdot\frac{d[2]}{dx} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{a-x}{a+x}\cdot\frac{(a-x)-(a+x)(-1)}{(a-x)^2} = \frac{1}{(a+x)(a-x)}$$

19. $\int dx / (x^2-a^2) = -\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{x}{a} + c = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + c,$

$|x| > a.$

20. $\int dx / \sqrt{a^2 - x^2} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$

21. $\int dx / \sqrt{a^2 + x^2} = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c$

22. $\int dx / \sqrt{x^2 - a^2} = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + c$

مثـــال (١) :

احسب التكاملات التالية:

$$\int (1 - x) \sqrt{x} \quad dx \quad , \quad \int x^5 \, dx \quad , \quad \int dx / \sqrt[3]{x^2}$$

$$\int dx / \sqrt[3]{x^2} = \int dx / x^{2/3} = \int x^{-2/3} \, dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = 3 x^{1/3} + c.$$

$$\int x^5 \, dx = \frac{1}{6} x^6 + c$$

$$\int (1-x) \sqrt{x} \, dx = \int (\sqrt{x} - x \sqrt{x}) dx =$$

$$= \int \sqrt{x} \, dx - \int x \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} + c$$

مثـــال (٢) :

احسب التكاملات الآتيـــة:

$$\int \frac{dx}{2 + x} \quad , \quad \int e^{3x} \, dx \quad , \quad \int e^{-x} \, dx$$

$$\int \frac{dx}{2+x} = \int \frac{d(x+2)}{x+2} = \ln|x+2| + c ,$$

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}\,d(3x) = \frac{e^{3x}}{3} + c ,$$

$$\int e^{-x}\,dx = -\int e^{-x}\,(d(-x)) = -e^{-x} + c .$$

مثال (٣) :

احسب التكاملات الاتيه:

$$\int a^{2x}\,dx \quad , \int (e^{1/x}/x^2)\,dx \quad , \int \frac{dx}{e^x+1}$$

$$\int a^{2x}\,dx = \tfrac{1}{2}\int a^{2x}\,d(2x) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^{2x}}{\ln a}\right) + c,$$

Put $1/x = y$
$\Rightarrow -1/x^2\,dx = dy$
$\Rightarrow dx = -x^2\,dy$

$$\int (e^{1/x}/x^2)\,dx = -\int e^{1/x}\,d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{1/x} + c ,$$

$$\int dx/(e^x+1) = \int \frac{e^{-x}\,dx}{1+e^{-x}} = -\int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$= -\ln(1+e^{-x}) + c$$

$$= \ln\frac{e^x}{1+e^x} + c =$$

$$= x - \ln(1+e^x) + c.$$

مثال (٤) :

احسب التكاملات الاتيه:

$$\int dx/\sqrt{4-x^2} \quad , \quad \int dx/\sqrt{25-16x^2} \quad , \quad \int dx/(e^x+e^{-x})$$

$$\int dx / \sqrt{4 - x^2} = \sin^{-1} \frac{x}{2} + c$$

$$\int dx / \sqrt{25-16x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{4\,dx}{\sqrt{(5)^2 - (4x)^2}} = \frac{1}{4} \sin^{-1} \frac{4x}{5} + c$$

$$\int dx / (e^x + \bar{e}^x) = \int \frac{2}{\cosh x}\, dx = \quad \Leftarrow$$

$$= \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1}\, dx = \tan^{-1} e^x + c$$

مثال (٥) :

احسب التكاملات الاتيه:

$$\int \frac{dx}{9 - x^2} \;,\; \int dx / \sqrt{x^2 - 1} \;,\; \int dx / \sqrt{16x^2 - 25}.$$

$$\int \frac{dx}{9 - x^2} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3 + x}{3 - x} \right| + c = \frac{1}{3} \tanh^{-1} \frac{x}{3} + c' .$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + c$$

$$= \cosh^{-1} x + c'$$

$$\int dx / \sqrt{16x^2 - 25} = \tfrac{1}{4} \ln \left| 4x + \sqrt{16x^2 - 25} \right| + c$$

$$= \tfrac{1}{4} \cosh^{-1} \frac{4x}{5} + c$$

-(تمـــارين)-

(الصور القياسيه للتكامـــــل)

احسب التكاملات الاتيـــه :

1. $\int (a+x)^3 dx$, $\int (x-2)^{3/2} dx$, $\int x^{-3}\, dx$

2. $\int (x+3)^{-\frac{1}{2}} dx$, $\int \frac{1}{(2-y)^3}\, dy$, $\int \frac{x-1}{x+1}\, dx$

3. $\int \frac{dx}{3x+1}$, $\int \frac{dx}{(a+bx)^{1/3}}$, $\int \frac{x^2\, dx}{1-x^3}$

4. $\int a^{4x}\, dx$, $\int e^{4x}\, dx$, $\int e^{1/x^2}\, x^{-3}\, dx$

5. $\int x^2\, e^{x^3}\, dx$, $\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+3}\, dx$, $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx$

6. $\int \sin 2x\, dx$, $\int \cos \frac{1}{2} x\, dx$, $\int \tan \frac{1}{2} x\, dx$

7. $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx$, $\int \frac{x}{\cos^2 x^2}\, dx$, $\int \frac{1}{\sin^2 2x}\, dx$

8. $\int e^{x^2 + 2x}\, dx$, $\int \frac{x^2\, dx}{1-2x^3}$, $\int \frac{\tan x}{\cos x}\, dx$

9. $\int e^x \cos e^x\, dx$, $\int e^3 \cos x \sin x\, dx$,

10. $\int \frac{dx}{\sin x}$, $\int \frac{dx}{9x^2 - 16}$, $\int \frac{dx}{25 - 16x^2}$.

٢ ـ الطرق العامه للتكامل :

أ ـ القانون الاول :

$$\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

حيث c مقدار ثابت

البرهان :

بتفاضل الطرف الايسر

$$d\left[\int c\, f(x)\, dx\right] = c\, f(x)\, dx \qquad (1)$$

ثم بتفاضل الطرف الايمن

$$d\left[c\int f(x)\, dx\right] = c\, d\left[\int f(x)\, dx\right] + K \qquad (2)$$

$$= c\, f(x)\, dx$$

* أى أن الفرق بين الدالتين فى (١) ، (٢) يختلفان على الاكثر

بالمقدار K أى أن

$$\int c\, f(x)\, dx - c \int f(x)\, dx = K.$$

حيث K مقدار ثابت اختيارى ومنه ينتج ان

$$\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx.$$

مثال (١) :

احسب التكامل : $6 \sin x\, dx$

$$\int 6 \sin x\, dx = 6 \int \sin x\, dx$$

$$= -6 \cos x + c.$$

مثال (٢) : احسب التكامل :

$$\int 25\, x^4\, dx$$

$$\int 25\,x^4\,dx = 25\int x^4\,dx$$

$$= 25.\frac{x^5}{5} + c = 5x^5 + c.$$

ب- تكامل المجموع الجبرى لعدد محدود من الدوال يساوى المجموع الجبرى لتكاملات هذه الدوال.

* اى ان:

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx .$$

البرهان :

نفاضل كل من طرفى المتساويه السابقة على حدة فنحصل على النتيجة المطلوبة.

مثال (١) : احسب التكامل

$$I = \int (x^2 + 6x^5 + b\sin x - 3\cos x)\,dx$$

$$I = \int x^2dx + 6\int x^5dx + b\int \sin x\,dx - 3\int \cos x\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^6 - b\cos x - 3\sin x + c .$$

مثال (٢) :

احسب التكامل

$$\int \frac{5\,dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$\int \frac{5\,dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = 5\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$$

$$= 5\int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx + 5\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$$

$$\int \frac{5dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = 5 \int \frac{dx}{\cos^2 x} + 5 \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= 5 \tan x - 5 \cot x + c$$

ملاحظات : ١ - اذا كانت الدالة المطلوبة تكاملها على الصورة $\frac{f'(x)}{f(x)}$ فان

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c = \ln |c' f(x)|$$

مثال (١) : احسب التكامل

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + 1}$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)'\,dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x\,dx}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + c = \ln \sqrt{c\,(x^2+1)}.$$

٢ - اذا كانت الدالة المطلوبة تكاملها على الصورة $[f(x)]^n \cdot f'(x)$ فان

$$\int f'(x) \cdot [f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال (٢) : احسب التكاملات $\int \sin x \cos x\,dx$, $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$

$$\int \sin x \cos x\,dx = \int \sin x\, d(\cos x)$$

$$= \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \tan x\, d(\tan x) = \frac{\tan^2 x}{2} + c.$$

1). we Look to the function very well ⇒ Look
so as to find the good x variable ob it
which can be changed into another
Varible to make some confusing
x variable part vanish, at the same
time we have thus got a good function
that can be
integrated
easyly

٣ ـ اذا كانت

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

$$\int f(u)du = F(u) + c$$

فان

حيث $u = \phi(x)$.

مثـــال (٣) : احسب التكامل

$$\int 2x\, e^{x^2}\, dx$$

$$\int 2x\, e^{x^2}\, dx = \int e^{x^2}\, d(x^2) = \int e^u\, du = e^u + c$$

$$= e^{x^2} + c$$

حيث $u = x^2$ ، $du = 2x\,dx$.

مثـــال (٤) : احسب التكامل

$$\int x^2 \sqrt{4-3x^3}\, dx$$

لان

$$d(4 - 3x^3) = -9\, x^2$$

نضع

$$u = 4 - 3x^3$$

ويصبح التكامل

Let $x^2 = y$
$\Rightarrow dy = 3x^2\,dx$

$$\int x^2 \sqrt{4-3x^3}\, dx = -\frac{1}{9} \int \sqrt{4-3x^3}\; d(4-3x^3)$$

$$= -\frac{1}{9} \int \sqrt{u}\; du = -\frac{1}{9}\, \frac{u^{3/2}}{3/2}$$

$$= -\frac{2}{27}\, (4 - 3x^3)^{3/2} + c$$

$$= -\frac{2}{27} \sqrt{(4 - 3x^3)^3} + c$$

Let $y = 1/x^2$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-1/x^4}}$$

another solution
$= -1/2 \sin^{-1}(1/x^2) + C$

مثـــال (٥) : احسب التكامل

$$\int dx/(x\sqrt{x^4 - 1})$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{2} \int \frac{2x\,dx}{x^2\sqrt{(x^2)^2-1}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sec^{-1} u + c = \tfrac{1}{2} \sec^{-1} x^2 + c$$

$$= \tfrac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1}{x^2} + c .$$

د ـ قانون التكامل بالتجزئ :

إذا كانت الدالتان $v = v(x)$, $u = u(x)$ قابلتان للتفاضل فـــان

$$d(uv) = u.dv + v\,du$$

بتكامل طرفي هذه المعادله نحصل على

$$uv = \int u.dv + \int v\,du$$

وبالتالى فان

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Since
$du = u'.dx$
$\& \; dv = v'.dx$

ويمكن ان نكتب ذلك على الصوره

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx. \qquad (I)$$

مثال (١) : احسب التكامل $\int x^2 \ln x\,dx$

بوضع $u = \ln x$, $dv = x^2dx$ نحصل على:

$$du = \frac{dx}{x} , \quad v = \int dv = x^3/3$$

وبالتعويض فى العلاقة (I) فان

$$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c .$$

مثال (٢): احسب التكامل $\int x\, e^{ax}\, dx$

أ - نختار $u = e^{ax}$, $dv = xdx$ فنحصل على

$$du = a\, e^{ax}\, dx \,,\quad v = x^2/_2$$

بالتعويض في الصورة (I) نحصل على

$$\int x\, e^{ax} dx = \frac{x^2}{2}\, e^{ax} - \int \frac{ax^2}{2}\, e^{ax}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\, e^{ax} - \frac{a}{2}\int x^2\, e^{ax}\, dx$$

أي ان التكامل في الطرف الايمن اكثر صعوبه منه في الطرف الايسر ومعنى هذا ان الاختيار السابق لم يكن سليما .

(ب) بأخذ $u = x$, $dv = e^{ax}dx$ نحصل على

$$v = \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}\, e^{ax} \,,\quad du = dx$$

بالتعويض في (I) اذن

$$\int x\, e^{ax}\, dx = x\, \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a}\, dx$$

$$= x\, \frac{e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + c$$

مثال (٣) : احسب التكامل $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

باختيار $u = \ln x$, $dv = \frac{1}{x}\, dx$ نجد ان

بالتعويض في (I) نجد ان

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x}\, dx$$

$$\therefore \int \frac{\ln x}{x}\,dx + \int \frac{\ln x}{x}\,dx = (\ln x)^2 + c$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}(\ln x)^2 + c .$$

مثال (٤) : احسب التكامل $\int \sin^{-1} x\,dx$

نختار $u = \sin^{-1}x$, $dv = dx$ وبالتالى فان

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} , \quad v = x$$

بالتعويض فى (I)

$$\int \sin^{-1}x\,dx = x\sin^{-1}x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

i.e. let $1-x^2 = y \Rightarrow -2x\,dx = dy$

$$= x\sin^{-1}x + \tfrac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

ب ـ التكامل بالتعويض :

اذا كان التكامل $\int f(x)dx$ على صوره غير معروفه لنا فيمكننا تحويلها الى احدى الصور القياسيه باستخدام تعويض مناسب $x = \phi(t)$ مثلا فيكون $dx = \phi'(t)dt$

ويصبح التكامل على الصوره.

$$\int f(x)dx = \int f[\phi(t)]\,\phi'(t)\,dt.$$

ولاتوجد قاعده عامه لاختيار الداله $\phi(t)$ ولكن الامثله الاتيه توضح بعض الطرق.

مثال (٥) : احسب التكامل $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

بوضع $x = \sin t$ حيث $|x| \leq 1$ نجد $|t| \leq \pi/2$

ان $dx = \cos t \, dt$

ويصبح التكامل على الصوره

$$\int \sqrt{1 - x^2} \, dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt$$

$$= \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t \, dt = \int \cos^2 t \, dt$$

$$= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + c$$

ثم بالتعويض عن t بـ x نحصل على

$\sin 2t = 2x \sqrt{1 - x^2}$

$$\int \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(\sin^{-1} x + x \sqrt{1 - x^2}\right) + c$$

مثال (٦) : احسب التكامل $\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \, dx$

$$\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \, dx = \int \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx + \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$$

$$= \sin^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + c.$$

مثال (٧) : احسب التكامل $\int \frac{dx}{\sin x}$

بوضع $\cos x = t$, $x = \cos^{-1} t$ فان $dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$

ويصبح التكامل على الصوره

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \left(\frac{-dt}{\sqrt{1 - t^2}}\right)$$

$\cos 2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$

$= 2\sin^2\frac{x}{2}$ (1) $\quad \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$

$= 2\cos^2\frac{x}{2}$ (2)

$\Rightarrow \frac{(1)}{(2)} =$

$\frac{1}{2}\ln|\tan^2\frac{x}{2}| = \ln|(\tan^2\frac{x}{2})^{1/2}| = \ln|\tan\frac{x}{2}|$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\int \frac{dt}{1-t^2} = -\tanh^{-1} t + c$$

$$= -\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + c = \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + c$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c .$$

** مثال (٨) : احسب التكامل $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

بوضع $x = \frac{1}{t}$ فان $dx = -\frac{dt}{t^2}$ ويصبح التكامل على الصوره

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}\left(-\frac{dt}{t^2}\right)$$

$$= -\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = -\sqrt{1+t^2} + c$$

$$= -(\sqrt{1+x^2})/x + c .$$

مثال (٩) : احسب التكامل $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

بالتعويض عن $x = \ln t$ نجدان $t = e^x$ ،

فنحصل على $dx = \frac{dt}{t}$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \tan^{-1} t + c = \tan^{-1} e^x + c.$$

- (تمـــارين) -

احسب التكاملات الاتيه :-

1. $\int \frac{\coth 3x}{\sinh 3x}\,dx$, $\int \cosh 2x\,dx$, $\int \frac{1}{\cosh x}\,dx$.

2. $\int \cosh^3 \tfrac{1}{2}x\,dx$, $\int \frac{1}{\cosh^4 x}\,dx$, $\int x \sinh x\,dx$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$, $\int \sqrt{x^2+4}\,dx$, $\int dx/(x\sqrt{1-x^2})$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+17}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$, $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$.

5. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{x^4+1}\,dx$, $\int x^2(x^2+\frac{4}{3})^{-3/2}dx$, $\int \frac{dx}{4x^2+12x+5}$.

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$, $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$.

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}$, $\int \frac{x\,dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}}$, $\int \frac{dx}{3-2\cos x}$.

8. $\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$, $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$, $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$, $\int \frac{\sqrt{4x-x^2}}{x^3}\,dx$, $\int \frac{dx}{\sin x-\cos x-1}$.

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}}$, $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^x+1}\,dx$, $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

11. $\int x\,e^x\,dx$, $\int x^2 \ln x\,dx$, $\int x\sqrt{1+x}\,dx$

12. $\int \sin^2 x\,dx$, $\int \frac{1\,dx}{\cos^3 x}$, $\int x^2 \sin x\,dx$.

13. $\int x^3\,e^{2x}dx$, $\int \frac{x^2\,dx}{(a+x^2)^m}$, $\int \sqrt{(9+x^2)^3}\,dx$.

14. $\int \frac{x}{\cos^2 3x}\,dx$, $\int x\cos x\,dx$, $\int \cos^{-1} 2x\,dx$.

15. $\int x\,e^{-3x}dx$, $\int x\tan^{-1} x\,dx$, $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

16. $\int x^3 \sin x\,dx$, $\int x \sin^{-1} x^2 dx$, $\int \sin x \sin 3x dx$.

17. $\int \sin(\ln x)dx$, $\int e^{ax}\cos bx dx$, $\int e^{ax}\sin bx dx$.

18. $\int \sqrt{(4-x^2)^3}\,dx$, $\int (x^2-16)^{-3}\,dx$, $\int \sin^4 x\,dx$.

19. $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$, $\int \sin^4 x \cos^4 x\,dx$, $\int \operatorname{cosec}^5 x dx$.

20. $\int e^{3x} x^2 \sin x\,dx$, $\int \sin 3x \cos 2x dx$, $\int e^{2x}\cos 3x dx$.

الفصل الثانى
بعض انواع التكاملات

أ - التكامل باستخدام الكسور الجزئيه :-

سوف نشرح الطرق المختلفه لتحليل اى كسر الى كسور جزئيه عن طريق بعض الامثله .

مثال (١) : احسب $\int \frac{(2x+3)}{x^3-x^2-2x}\,dx$

$x(x-1)(x+2)$

يمكن ان يكتب مقام الكسر السابق على الصوره

ويصبح الكسر امام علامه التكامل على الصوره

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$

ومن ذلك نجد ان

$$(1)\quad 2x+3 = (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A$$

ومن مقارنه معاملات قوى x المختلفه يمكننا تعيين C, B, A.

$$A+B+C = 0, \quad A+2B-C = 2, \quad -2A = 3$$

وبحل هذه المعادلات معا يكون

$$A = -3/2 \quad , \quad B = 5/3 \quad , \quad C = -1/6 \ .$$

ويصبح التكامل المطلوب على الصوره

$$\int \frac{(2x+3)\,dx}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= -3/2 \ln|x| + \frac{5}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+2| + \ln C$$

$$= \ln \frac{|C|\,|x-1|^{5/3}}{|x|^{3/2}\,|x+2|^{1/6}} \ .$$

يمكننا تعيين قيم الثوابت في (1) بطريقة سهلة وذلك بالتعويض عن قيم $x = 0$, $x = 1$, $x = -2$ على الترتيب فنحصل على

$x = 0$ $\quad 3 = -2A$ $\quad A = -3/2$

$x = 1$ $\quad 5 = 3B$ $\quad B = 5/3$

$x = -2$ $\quad -1 = 6C$, $\quad C = -\frac{1}{6}$

مثال (٢):

احسب:

$$\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3}\, dx$$

باستخدام الكسور الجزئية:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)}$$

وبمقارنة المعاملات نحصل على

$A = -1$, $\quad B = 2$, $\quad C = 1$, $\quad D = 2$

فيصبح التكامل على الصورة

$$\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3}\, dx = -\int \frac{dx}{x} + 2\int dx/(x-1)^3 + \int dx/(x-1)^2 + 2\int dx/(x-1).$$

$$= -\ln|x| - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| + C$$

$$= -\frac{x}{(x-1)^2} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} + C .$$

مثال (٣):

احسب التكامل.

$$\int 4dx/(x^3 + 4x)$$

المقام فى هذا المثال:

$$x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$$

ويصبح الكسر

$$\frac{4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

وبمقارنه المعاملات نحصل على

$$A = 1, \qquad B = -1, \qquad C = 0$$

ويصبح التكامل

$$\int \frac{4dx}{x^3 + 4x} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2 + 4}$$

$$= \ln |x| - \tfrac{1}{2} \ln (x^2 + 4) + \ln |c|$$

$$= \ln \left| \frac{cx}{\sqrt{x^2 + 4}} \right|$$

مثال (٤):

احسب

$$\int \frac{(x^3 + x^2 + 2)}{(x^2 + 2)^2} dx$$

نجد ان الكسر

$$\frac{x^3 + x^2 + 2}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2)^2} \qquad \frac{Cx + D}{x^2 + 2}$$

وبمقارنه المعاملات نحصل على

$$A = -2, \qquad B = 0, \qquad C = 1, \qquad D = 1$$

والتكامل يصبح على الصوره

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 2}{(x^2 + 2)^2} dx = - \int \frac{2x\, dx}{(x^2+2)^2} + \int \frac{(x + 1)}{x^2 + 2} dx$$

$$= \frac{1}{(x^2+2)} + \tfrac{1}{2} \ln (x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

- (تمارين) -

احسب التكاملات الاتيه :

1. $\int \frac{dx}{x^4 - 4}$, $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^3+x^2-6x}$, $\int \frac{3x + 5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$.

2. $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3 - x}\,dx$, $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2}\,dx$.

3. $\int \frac{x^2\,dx}{a^4-x^4}$, $\int \frac{2x^3 + 3}{(x^2+1)^2}\,dx$, $\int \frac{x^4 +4x^3-4x^2 - 4}{(x^2 + 2)^3}\,dx$.

4. $\int \frac{x^2 + 3x -4}{x^2 - 2x -8}\,dx$, $\int \frac{dx}{x^2+7x + 6}$, $\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2}$.

5. $\int \frac{dx}{x^3 + x}$, $\int \frac{x^4}{(1-x)^3}\,dx$, $\int \frac{xdx}{(x - 2)^2}$.

6. $\int \frac{2x^3\,dx}{(x^2 + 1)^2}$, $\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 1)^2}\,dx$, $\int \frac{2x^3\,dx}{(x^2+1)^2}$.

7. $\int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^x}$, $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\,(1 + \cos^2 x)}$.

ب - التعويضات المثلثية :

اذا كانت الداله المطلوب ايجاد تكاملها داله قياسيه فى $\sin x$ ، $\cos x$ فاستخدام التعويض

$$\tan \frac{x}{2} = t$$

يمكن تحويلها الى داله قياسيه فى t وذلك لان

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2} \qquad (1)$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad (2)$$

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2} \qquad (3)$$

$$dx = \frac{2dt}{1 + t^2} \quad , \quad x = 2 \tan^{-1} t$$ وايضا

مثال (١) : احسب

$$I = \int \frac{1 + \sin x}{\sin x \, (1 + \cos x)} \, dx$$

باستخدام التعويض $\tan \frac{x}{2} = t$ نحصل على

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad , \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

ويصبح التكامل على الصورة

$$I = \int \frac{\left[1 + 2t/(1 + t^2)\right]}{(2t/(1+t^2))(1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2})} \cdot \frac{2 \, dt}{1 + t^2}$$

$$= \int \frac{2(1 + t^2 + 2t)}{2t \, (1 + t^2 + 1 - t^2)} \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{t^2 + 2t + 1}{t} \, dt$$

$$I = \tfrac{1}{2} \int \left(t + 2 + \frac{1}{t}\right) dt$$

$$= \tfrac{1}{2} \left(t^2/_2 + 2t + \ln|t|\right) + C$$

$$= \frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{4} + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| + C$$

ملاحظة: اذا كانت الدالة المطلوب تكاملها تحتوى $\cos^{2n} x$ حيث $n = 1, 2, \ldots\ldots$ او $\sin^{2n} x$ فقط أى تحتوى قوى زوجية لاى من $\sin x$ ، $\cos x$ فيمكن استخدام التعويض $\tan x = t$.

-(تمارين)-

احسب التكاملات الاتيه:

1. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$ ، $\int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx$

2. $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$ ، $\int \sin 3x \cos x \, dx$

3. $\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$ ، $\int \frac{1}{\cos x} dx$

4. $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$ ، $\int \frac{dx}{5 + 4 \cos x}$

5. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$ ، $\int \frac{\sin x \, dx}{1 + \sin^2 x}$

6. $\int \sin \sqrt{x} \, dx$.

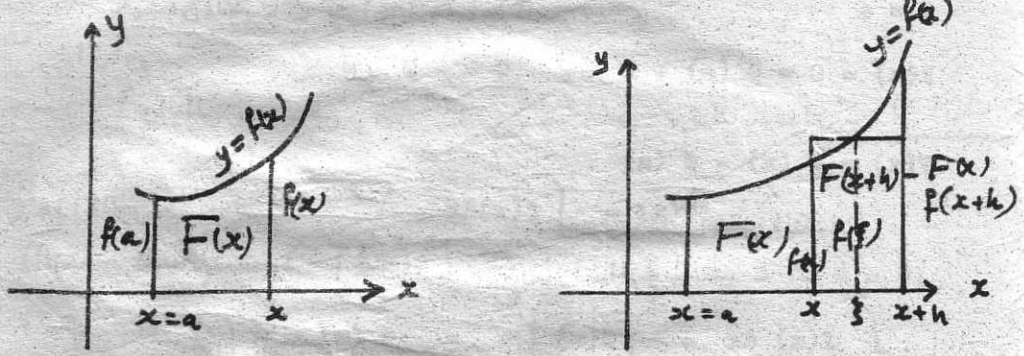
الفصل الثالث

١ـ مفهوم التكامل المحدود

نبحث الآن المعنى الهندسى للعلاقة

$$y(x) = \int f(x)\,dx = \phi(x) + c$$

لهذا السبب نرسم المنحنى $y = f(x)$ ونعين نقطتين على هذا المنحنى الاحداثى السينى لهما هو a ، x على الترتيب.



المساحة المظللة المحصورة بين المستقيمين $x=a$ ، $x=x_1$ ومحور السينات والمنحنى $y = f(x)$ هى دالة فى x باعتبار a مقدار ثابت.

اى ان المساحة $F = F(x)$ فاذا اعتبرنا قيمة هذه الدالة عند النقطة $x + h$ تكون الزيادة فى المساحة $F(x+h)-F(x)$

ويمكن التعبير عن هذه الزيادة كالاتى :

$$F(x+h) - F(x) = h.f(\xi)$$

حيث $x \leq \xi \leq x + h$ اى ان

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi) \quad , \quad x \leq \xi \leq x + h$$

بأخذ النهاية عندما $h \longrightarrow 0$ نحصل على

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} f(\xi)$$

$$= \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$$

أى ان التكامل الغير محدود هو دالة تعبر عن الساحة تحت منحنى الداله المطلوب تكاملها $f(x)$.

$$\left[\emptyset(x) = \int f(x)\,dx\right] \qquad F(x) = Y(x) = \emptyset(x) + c$$

بحيث ان الثابت C يتم اختياره مساويا للصفر عند $x = a$

اى ان $F(a) = 0 = \emptyset(a) + C$, $C = -\emptyset(a)$

وبالتالى نحصل على

$$F(x) = \emptyset(x) - \emptyset(a) \qquad (1)$$

هذا الفرق حيث $\emptyset(x) = \int f(x)dx$ يسمى التكامل المحدود على الفترة $[a,x]$ ويرمز له بالرمز

$$\int_a^x f(x)\,dx = \left[\emptyset(x)\right]_a^x = \emptyset(x) - \emptyset(a)$$

ومن هذه العلاقه يتضح ان التكامل المحدود هوعباره عن الفرق بين قيمتى تكامل غير محدود بأستثناء مقدار ثابت.

- اى ان التكامل المحدود عباره عن عدد يتحدد بنهايتى التكامل بينما التكامل الغير محدود هوداله فى المتغير X .

∴ العلاقة

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

- لاتعتمد على متغير التكامل X بل هوداله فى الحد الاعلى b والحد الاسفل a فقط .

مثال (١) :

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= -\cos \pi/2 - (-\cos 0)$$

$$= 0 + 1 = 1$$

مثال (٢) :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\tan^{-1} x\right]_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

مثال (٣) : احسب تكامل $\int_{-1}^{1} (2x^2-x^3)dx$

$$\int_{-1}^{1} (2x^2-x^3)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = (\frac{2}{3} - \frac{1}{4}) - (-\frac{2}{3} - \frac{1}{4})$$

$$= \frac{4}{3}$$

مثال (٤) :

اوجد $\int_3^6 xy\,dx$ عندما $x=6\cos\theta,\ y = 2\sin\theta$

$x = 6\cos\theta$ ∴ $dx = -6\sin\theta\,dx$

وعندما $x = 6\cos\theta = 6$ يعني ان $\theta = 0$ وعندما $x=6\cos\theta = 3$

فان $\theta = \pi/3$

اي ان $\int_3^6 xydx = \int_{\pi/3}^{0} (6\cos\theta)(2\sin\theta)(-6\sin\theta)\,d\theta$

$$= -72 \int_{\pi/3}^{0} \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta = \left[-24\sin^3\theta\right]_{\pi/3}^{0}$$

$$= -24\left[0 - (\sqrt{3}/2)^3\right] = 9\sqrt{3}\ .$$

٦ ـ ١ ـ بعض النظريات عن التكامل المحدود

١ ـ $$\int_a^b A\,f(x)dx = A\int_a^b f(x)\,dx$$ حيث A مقدار ثابت

مثال:

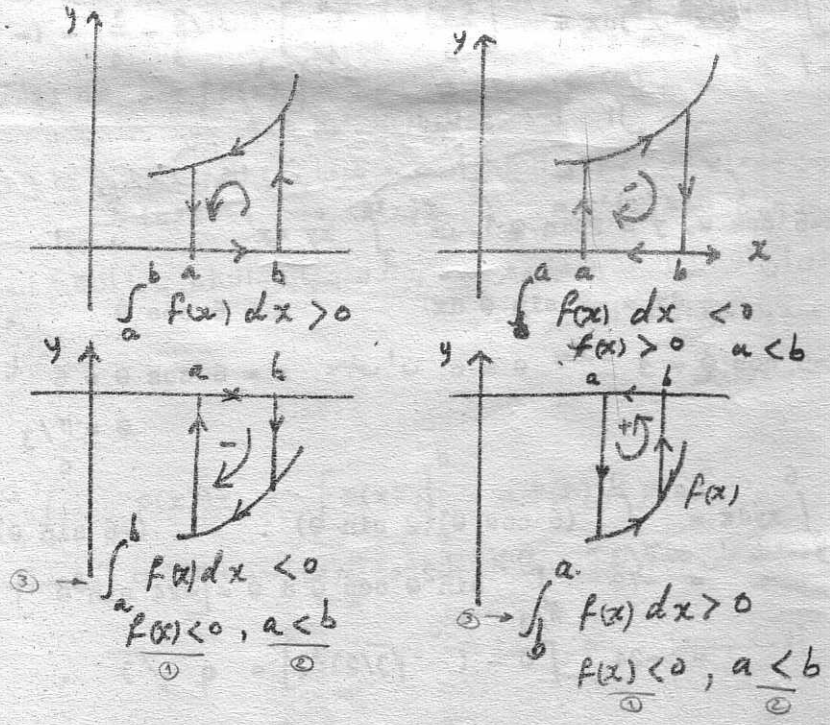
$$\int_1^e 8\,\frac{dx}{x} = 8\int_1^e \frac{dx}{x} = 8\left[\ln x\right]_1^e$$
$$= 8\,(\ln e - \ln 1)$$
$$= 8\,(1-0) = 8$$

ب ـ اذا عكسنا نهايتى التكامل فان اشاره التكامل تتغير

أى ان:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

حيث $f(x)$ داله متصله فى الفترة $[a,b]$



البرهان :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$$

أيضاً:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = -\left[F(a) - F(b)\right]$$

$$= -\int_b^a f(x)dx.$$

مثال (١) :

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0$$

$$= 1 + 1 = 2$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = \left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos \pi$$

$$= -1 - 1 = -2$$

أيضاً:

$$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0$$

جـ - اذا جزئت الفترة a,b بواسطة النقطة c الى جزئين

فان:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

البرهان :

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

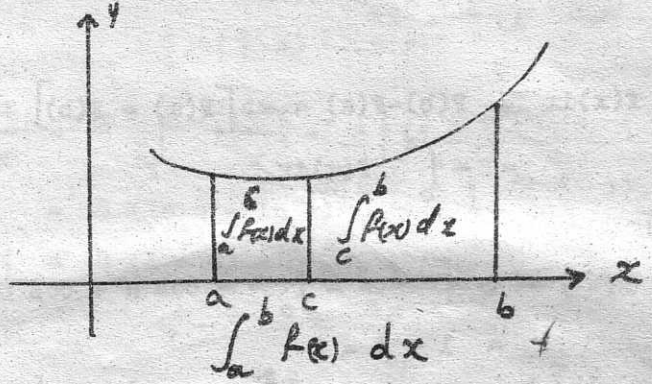
$$\int_a^c f(x)\, dx = F(c) - F(a), \quad \int_c^b f(x)dx = F(b) - F(c)$$

ولان:

$$F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$$

ينتج أن

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



$$\int_a^b f(x)\,dx$$

د ـ التكامل المحدود لمجموع دوال هو المجموع للتكامل المحدود لكل من هذه الدوال ⑨ اعني:

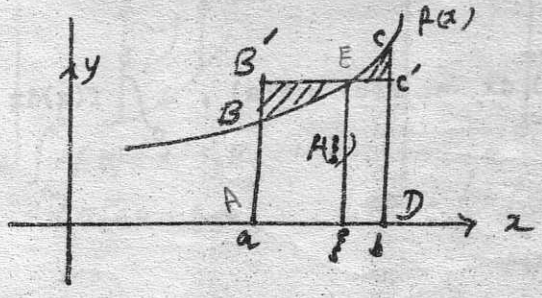
$$\int_a^b [f(x) + \phi(x) - \psi(x)]\,dx =$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b \phi(x)dx - \int_a^b \psi(x)dx .$$

هـ ـ نظرية القيمة المتوسطة : ⑤

اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة في الفترة المغلقة $[a,b]$ فانه توجد على الاقل نقطة ξ بحيث $\xi \in (a,b)$ ويكون

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a).f(\xi) \quad , \quad a < \xi < b .$$



لان المساحة ABCD = مساحة المربع A B̀ C̀ D

فكون $(\xi - a)f(\xi) - \int_a^{\xi} f(x)\,dx$

$= \int_{\xi}^{b} f(x)dx - (b-\xi)f(\xi)$

$\xi f(\xi) - a\ f(a) + b\ f(\xi) - \xi f(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{b} f(x)dx$

$(b-a)\ f(\xi) = \int_a^b f(x)dx$

وتكتب ذلك بالصوره

$$\rightarrow f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

مثال: فى المنحنى $y = x^2$ اوجد قيمة $f(\xi)$ من النظرية السابقة على الفتره $[0,2]$

$$f(\xi) = \frac{1}{2-0} \int_0^2 x^2 dx = \tfrac{1}{2}\left[x^3/3\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

ومن ذلك لان الدالة y متصله فان

$$\xi^2 = \frac{4}{3} \rightarrow \xi = \sqrt{4/3} = 2\sqrt{3}\ /3$$

و - قيمه التكامل تقع بين النهايه العظمى والنهايه الصغرى للدالة $f(x)$ اى ان:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\,(b-a)$$

حيث m, M هى النهايتان العظمى والصغرى على الترتيب للداله $f(x)$.

البرهان: من العلاقة $M - f(x) \geqslant 0$ ينتج ان

$$\int_a^b \left[M-f(x)\right] dx \geqslant 0 \qquad (1)\quad a < b$$

وايضا من العلاقة $m - f(x) \leq 0$

$$\int_a^b \left[m - f(x)\right] dx \leq 0 \qquad (2)$$

ينتج ان

العلاقه (١) تؤدى الى

$$\int_a^b M\,dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$M(b-a) \geq \int_a^b f(x)\,dx$$

والعلاقه (٢) تؤدى الى

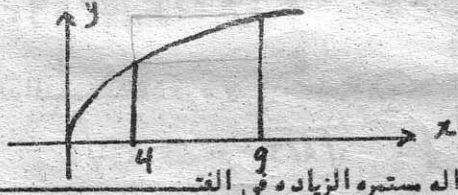
$$\int_a^b m\,dx - \int_a^b f(x)dx \leq 0$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

اى ان:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) .$$

مثال: عين قيمتى النهايه العظمى والصغرى للتكامل $\int_4^9 \sqrt{x}dx$



من الرسم يتضح ان الداله مستمره الزياده فى الفتره $[4,9]$

$$b-a = 5 , \quad M = \sqrt{9} = 3 , \quad m = \sqrt{4} = 2$$

من النظريه السابقه نجد ان

$$2 \times 5 \leq \int_4^9 \sqrt{x}\,dx \leq 3 \times 5$$

$$10 \leq \int_4^9 \sqrt{x}\,dx \leq 15$$

متوسط المساحة هى $F \simeq \frac{10+15}{2} = 12.5$

لكن:

$$\int_4^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_4^9$$

$$= \frac{2}{3}\left[(3^2)^{3/2} - (2^2)^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left[3^3 - 2^3\right]$$

$$= \frac{2 \times 19}{3} = 12{,}66 \ .$$

أى أن التكامل يعطى تقريب افضل للمساحة تحت المنحنى من حساب متوسط المساحة.

مثال : احسب $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx$

الدالة $\frac{\sin x}{x}$ مستمرة النقصان فى الفترة $[\pi/4 , \pi/2]$

$$m = \frac{\sin \pi/2}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \ , \quad M = \frac{\sin \pi/4}{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

$$b-a = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$$

بتطبيق النظرية :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M\,(b-a)$$

نجد ان

$$\pi/4 \cdot \frac{2}{\pi} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{2} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7$$

٣ - حساب التكامل المحدود:

أ - طريقه التكامل بالتجزئ:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u\,dv = \left[\int udv\right]_a^b$$

$$= \left[uv - \int vdu\right]_a^b$$

$$= \left[uv\right]_a^b - \int_a^b v\,du$$

مثال (١) : احسب $\int_0^1 xe^x\,dx$

بأخذ $x = u$, $dv = e^x dx$ نجدان $dx = du$

$v = e^x$,

$$\int_0^1 x\,e^x\,dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$

$$= e - (e-1) = 1 .$$

مثال (٢) : احسب $\int_1^e \ln x\,dx$

$u = \ln x$, $dx = dv$, $\frac{dx}{x} = du$

$$\int_1^e \ln x\,dx = \left[x \ln x - x\right]_1^e =$$

$$= (e \ln e - e) - (\ln 1 - 1)$$

$$= 1$$

ب - التكامل بالتعويض:

بوضع $x = \phi(t)$ حيث الداله العكسية $t = \psi(x)$ مستمره الزياده اومستمره النقصان فى الفتـــــرة $[a,b]$.

نجد أن :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\phi(t)]\ \phi'(t)\,dt$$

مثال (١) : احسب $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

باستخدام التعويض $x = a \sin t$.

$$t = \sin^{-1}\frac{x}{a}\ ,\quad dx = a\cos t\,dt$$

$$\psi(0) = \sin^{-1}\frac{0}{a} = \sin^{-1}0 = 0$$

$$\psi(a) = \sin^{-1}\frac{a}{a} = \sin^{-1}1 = \pi/2$$

أي أن

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_{\sin^{-1}0}^{\sin^{-1}1} a^2\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt$$

$$= a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt$$

$$= a^2\int_0^{\pi/2}\tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[t\right]_0^{\pi/2} + a^2/_2\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = a^2\frac{\pi}{4}\ .$$

مثال (٢) : احسب $\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$

باستخدام التكامل بالتجزئ نحصل على

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x.dx = \left[-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx$$

فاذا رمزنا للتكامل في الطرف الايسر بالرمز I_n فان التكامل في الطرف الايمن يرمز له بالرمز I_{n-2} .

1) $$I_n = 0 + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$ ای ان

تسمی هذه الصیغة بصیغة التکامل بالاختزال المتالی لانه یمکن تطبیقها عدد من المرات والحصول علی I_0 (I_1 علی حسب کون n عدد زوجی اوعدد فردی ثم التعویض عن کل نتیجه فی النتیجة السابق لها لنحصل اخیرا علی I_n .

فاذا کانت n عدد زوجی فان اخر حد ممکن الحصول علیه هو

2) $$I_n = \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-3)}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{1}{2} I_0$$

حیث

3) $$I_0 = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^0 \, dx = \int_0^{\pi/2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

فیکون التکامل هو:

4) $$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{(n-1)(n-3) \cdots 1}{n(n-1) \cdots 2} \pi/2 \qquad (1)$$

واذا کانت n عددا فردیا فان:

5) $$I_n = \frac{(n-1)(n-3) \cdots 2}{n(n-3) \cdots 1} \cdot I_1$$

6) $$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi/2} = 0 + 1 = 1$$

7) $$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{(n-1)(n-3) \cdots 2}{n(n-2) \cdots 1} \cdot 1 \qquad (2)$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$ نفس القوانین السابقه یمکن تطبیقها فی حالة

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^n x \, dx$$.

- (تمـارين) -

احسب قيمة كل من التكاملات الاتية:

1. $\int_{-3}^{-1} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})dx$, $\int_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $\int_{-2}^{3} e^{x/2}dx$

2. $\int_{-6}^{-10} \frac{dx}{x+2}$, $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin x\, dx$, $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4}$

3. $\int_{-5}^{-3} \sqrt{x^2-4}\, dx$, $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2-9}$, $\int_{1}^{e} \ln x\, dx$

4. $\int_{0}^{2\pi/3} \frac{d\theta}{5+4\cos\theta}$, $\int_{0}^{\pi/3} \frac{dx}{1-\sin x}$, $\int_{0}^{1} e^x\, dx$

5. $\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$, $\int_{0}^{1} x(1-\sqrt{x})^2 dx$, $\int_{-1}^{2} (1-t^2)t\, dt$

6. $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{4-x^2}dx$, $\int_{0}^{8} \sqrt{1+3x}\, dx$, $\int_{0}^{1} \ln(x^2+1)dx$

7. $\int_{\theta=0}^{\theta=2} y\,dx$, $y = 1-\cos\theta$, $x = \theta - \sin\theta$

8. $\int_{2}^{3} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\, dt$, $y = e^t \sin t$, $x = e^t \cos t$

9. $\int_{0}^{\pi/2} \cos^n x\, dx$, $\int_{0}^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx$

10. $\int_4^9 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$, $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1}\,dx$

11. $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{x^2}\,dx$, $\int_{-2}^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,dx$

12. $\int_7^3 \ln (x + \sqrt{x^2-1})dx$, $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{2 + \tan x}$

٤) التكامل المحدود كنهايه مجموع:

نفرض ان الدالة $f(x)$ متصله ومستمره الزياده في الفترة $[a,b]$.

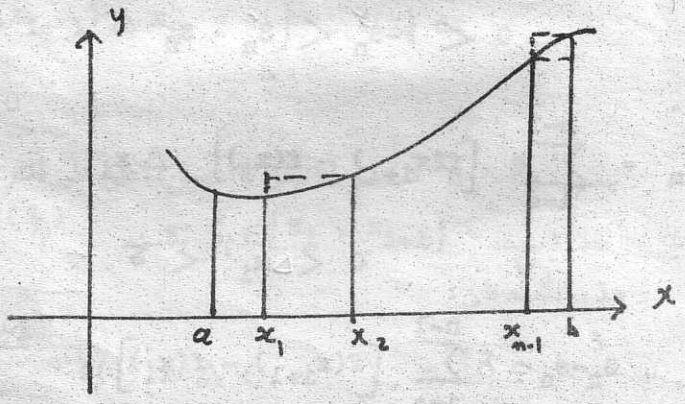
نقسم الفترة $[a,b]$ الى n من الاجزاء بواسطه نقط . أى ان

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots\dots < x_n = b$$

thus from ①③②
$f(x_0) < f(x_1)$

طول اى جزء من هذه الاجزاء نرمز له بالرمز Δx_i اى

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$



مساحة المستطيلات اسفل المنحنى تعين من العلاقات

$$f(x_0).\Delta x_0 \ , \ f(x_1)\Delta x_1, \ \dots, \ f(x_{n-1}).\Delta x_{n-1} \qquad (1)$$

مساحة المستطيلات أعلى المنحنى تعين من العلاقات

$$f(x_1)\,\Delta x_0 \ , \ f(x_2)\Delta x_1, \ \dots, \ f(x_n)\ \Delta x_{n-1} \qquad (2)$$

مجموع مساحات المستطيلات في (١) هى :

$$S_n = f(x_0)\ \Delta x_0 + \cdots + f(x_{n-1})\ \Delta x_{n-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\ \Delta x_i$$

ومجموع مساحات المستطيلات اعلى المنحنى هى :

$$S'_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\,\Delta x_i$$

-3- المساحة F تحت المنحنى تقع بين هذين المجموعين

$$S_n < F < S'_n$$

وكلما زاد عدد النقط x_n كلما اقتربت S'_n, S_n من المساحة F

$$0 < F - S_n < S'_n - S_n \qquad (A)$$

ولكن

$$S'_n - S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(x_{i+1}) - f(x_i)\right]\ \Delta x_i$$

-4- حيث $0 < \Delta x_i < \delta$ $\forall i$

$$S'_n - S_n = \delta \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(x_{i+1}) - f(x_i)\right]$$

$$= \delta \left[f(x_n) - f(x_0)\right]$$

$$0 < S'_n - S_n \leq \delta \left[f(b) - f(a)\right]$$

المتباينة (A) تصبح على الصورة:

$$0 < F - S_n < \delta\ M$$

$$|F - s_n| < \delta M$$

حيث $M = f(b) - f(a)$ وكلما ازداد n (n) كلما اقتربت

δ من الصفر أي يمكن كتابه

$$F = \lim_{n \to \infty} S_n$$

-5-

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i \quad (1)$$

$$\max \Delta x_i \longrightarrow 0$$

ايضا وبنفس الطريقه نحصل على :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx \quad (2)$$

$$\max \Delta x_i \to 0$$

يسمى S_n ، S_n' المجموع الاسفل والمجموع الاعلى على الترتيب.

-6- فاذا كانت $\xi_i \in [x_i , x_{i+1}]$ وكانت $f(\xi_i)$ قيمه الداله عند هذه النقطه فان :

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

$$S_n \leqslant \sigma_n \leqslant S_n' \quad \text{حيث}$$

وبالتالى فان

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

وهوتعريف التكامل المحدود كنهايه لمجموع مستطيلات اومساحات تحت المنحنى (x, fx).

المنحنى $(x , f(x))$.

مثال : باستخدام المجموع السابق اوجد $\int_0^a x^2 dx$

لنقسم الفترة $[0,a]$ الى n من الاقسام المتساويه فيكون طول كل جزء $= \frac{a}{n}$ اى ان $\Delta x_1 = \frac{a}{n}$

رقم المستطيل	عند نقط التقسيم x	y	مساحة المستطيل
1	$1 . \frac{a}{n}$	$1^2 . \frac{a^2}{n^2}$	$1^2 . \frac{a^2}{n^3} . \frac{a}{n} = 1^2 . \frac{a^3}{n^3}$
2	$2 . \frac{a}{n}$	$2^2 . \frac{a^2}{n^2}$	$2^2 . \frac{a^2}{n^2} . \frac{a}{n} = 2^2 . \frac{a^3}{n^3}$
- - -	- - -	- - -	- - -
n	$n . \frac{a}{n}$	$n^2 . \frac{a^2}{n^2}$	$n^2 . \frac{a^2}{n^2} . \frac{a}{n} = n^2 . \frac{a^3}{n^3}$

وبالتالى يكون المجموع الاعلى

$$S_n' = \frac{a^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$$= \frac{a^3}{n^3} . \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{a^3}{6} (1 + \tfrac{1}{n}) (2 + \tfrac{1}{n})$$

والساحة P من العلاقة

$$P = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a^3}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{a^3}{3}$$

اي ان

$$\int_0^a x^2 \, dx = \frac{a^3}{3}$$

مثال (٢) : احسب $\int_1^3 x^3 \, dx$ بطريق ايجاد S_n ثم أخذ النهاية

لنقسم الفترة $1 \leq x \leq 3$ الى n من الفترات الجزئيه المتساوية طول كل منها $x = 2/n$

رقم المستطيل	عند نقط التقسيم x	عند نقط التقسيم y	مساحة المستطيل
1	$1 + \frac{2}{n}$	$(1 + \frac{2}{n})^3$	$(1 + \frac{2}{n})^3 \cdot \frac{2}{n}$
2	$1 + 2 \cdot \frac{2}{n}$	$(1 + 2 \cdot \frac{2}{n})^3$	$(1 + 2 \cdot \frac{2}{n})^3 \cdot \frac{2}{n}$
.....			
n	$1 + n \cdot \frac{2}{n}$	$1 + n \cdot \frac{2}{n}$	$(1 + n \cdot \frac{2}{n})^3 \cdot \frac{2}{n}$

ليكن المجموع الاعلى S_n'

$$S_n' = \left[(1 + \frac{2}{n})^3 + (1+2.\frac{2}{n})^3 + \dots + (1 + n.\frac{2}{n})^3 \right] \frac{2}{n}$$

$$= \left[n+3 \left(2+3+ \dots + n\right) \frac{2}{n} + 3 \left(2^2+ \dots + n^2 \right) (\frac{2}{n})^2 + (2^3 + \dots + n^3)(\frac{2}{n})^3 \right] \frac{2}{n}$$

$$= \left[\underbrace{n}_{t_1} + 3 \underbrace{\frac{(n-1)(n+2)}{2} \cdot \frac{2}{n}}_{t_2} + 3 \underbrace{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 \right) (\frac{2}{n})^2}_{t_3} + \underbrace{\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1 \right) \cdot (\frac{2}{n})^3}_{t_4} \right] \frac{2}{n}$$

$$= \left[\underbrace{2}_{①} + \underbrace{6 \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)}_{②} + \underbrace{4 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) - \frac{24}{n^3}}_{③} + \underbrace{4\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{16}{n^3}}_{④} \right]$$

ومنه نجد ان:

$$\lim_{n \to} S_n' = 20$$

$$\int_1^3 x^3 \, dx = 20$$

تمرين: احسب التكاملات الاتيه بطريقة ايجاد S_n ثم نهاية S_n عندما $n \longrightarrow \infty$

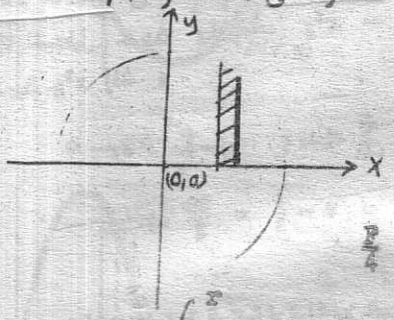
$$\int_a^b c\,dx \quad , \quad \int_0^5 x\,dx \quad , \quad \int_1^4 x^2\,dx \quad , \quad \int_1^4 (x^2 + x)\,dx.$$

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^3(n+1)^2}{4}$$

بعض تطبيقات التكامل المحدود :

١ - حساب المساحة أسفل منحنى: مثال (١): اوجد مساحة الدائرة التى نصف قطرها r



معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها r هى:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

أى أن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$\frac{F}{4}$ ∴ مساحة الربع الاول من الدائرة

$$F/4 = \int_0^r y\,dx = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

بالتعويض $x = r \sin t$ ، $dx = r \cos t\,dt$

وبالتالى حدود التكامل تصبح

$x = 0 \longrightarrow t = 0$

$x = r \longrightarrow t = \sin^{-1} \frac{r}{r} = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$

$$F/4 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t\,dt$$

$$= r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$$

$$= r^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt$$

$$= r^2/2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{r^2 \pi}{4}$$

فتكون مساحة الدائرة $= r^2 \pi$

1- $\Delta_K x = x_{n+1} - x_n \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$ and it's a regular portion

2- to determine the area of the approximate rectangle

$\Rightarrow S_K = \lim_{\substack{\Delta_K x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{0}^{n-1} f(x_K) \cdot \Delta_K x = \int_a^b f(x)\,dx$

$\Leftrightarrow$ look

$x_i \leq x_K \leq x_{i+1}$

i.e. x_K is the mean value $= \overline{x}$

where $S_n \leq S_K \leq S'_n$

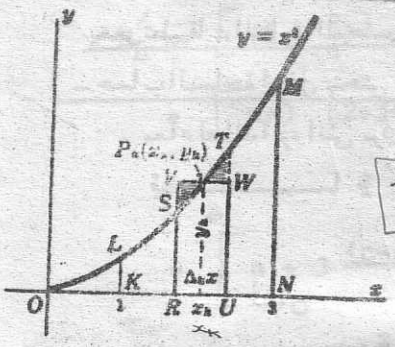
١ – أوجد المساحة المحددة بالمنحنى $y = x^3$ والمحور السينى والمستقيمين $x = 1$ ، $x = 3$.

من الشكل ٣٤ – ٢ نجد أن المساحة التى نبحث عنها هى $KLMN$ والشريحة المثلة هى $RSTU$ والمستطيل المقرب هو $RVWUF$ ، وقاعدة هذا المستطيل $\Delta_K x$ وارتفاعه $y_K = f(x_K) = x_K^3$ ومساحته $x_K^3 \cdot \Delta_K x$ إذن :

$\lim_{\substack{\Delta_K x \to 0 \\ K \to \infty}} \{ x_K^2 \cdot \Delta_K x$

$$A = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ K \to \infty}} \sum_{K=1}^{n} x_K^3 \, \Delta_K x = \int_1^3 x^3\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4}\Big|_1^3 = 9 - \frac{1}{4} = \frac{26}{4} \text{ sq. un.}$$



شكل ٣٤ – ٢

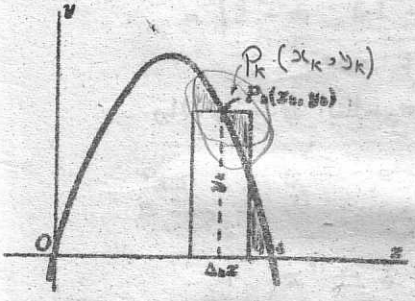
٢ – أوجد المساحة الواقعة فوق المحور السينى وتحت القطع المكافئ .

$y = 4x - x^2$.

المنحنى المفروض يقطع المحور السينى عند $x = 0$ ، $x = 4$ وعندما نستخدم الشرائح الرأسية تكون هاتان القيمتان حدى التكامل . وعرض المستطيل المقرب الموضح فى الشكل ٣٤ – ٣ يساوى $\Delta_K x$ وارتفاعه $y_K = 4x_K - x_K^2$ ومساحته $(4x_K - x_K^2) \cdot \Delta_K x$ إذن :

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{K=1}^{n} (4x_K - x_K^2)\,\Delta_K x = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx$$

$$= \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = 32/3 \text{ sq. un.}$$



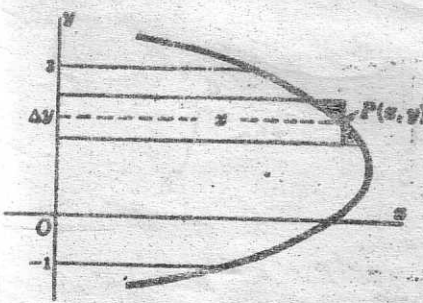
شكل ٣٤ – ٣

من الممكن اختصار المسافات على أن لا يغيب أبداً عن بالنا الطريقة المشروحة أعلاه بكاملها ، فنرى أنه بالإمكان صياغة التكامل المحدود ، بغض النظر عن حدى التكامل ، بمجرد تشكيل مساحة المستطيل المقرب .

٣ – أوجد المساحة المحددة بالقطع المكافئ $x = 8 + 2y - y^2$ والمحور الصادى والمستقيمان $y = 3$ ، $y = -1$.

نقسم المساحة عنا إلى شرائح أفقية. فيكون عرض المستطيل المقرب المبين بالشكل ٣٤ – ٤ هو Δy وطوله $x = 8 + 2y - y^2$ ومساحته هى $(8 + 2y - y^2)\,\Delta y$ ، والمساحة المطلوبة هى :

$$\int_{-1}^{3} (8 + 2y - y^2)\,dy = \left[8y + y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{3} = \frac{32}{3} \text{ sq. un.}$$



شكل ٣٤ – ٤

look ⇒ Notice always put the sign of x and y that make the area into consideration first on the graph and second in the integrand

(1) (2)

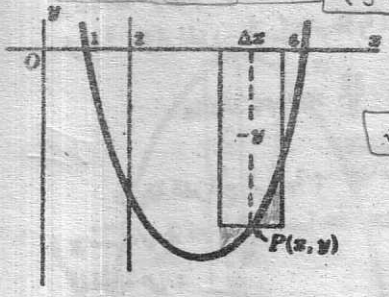
٤ – أوجد المساحة المحدة بالقطع المكافئ $y = x^2 - 7x + 6$ والمحور السينى والمستقيمين $x = 2$ ، $x = 6$.

إن عرض المستطيل المقرب المبين بالشكل ٣٤ – ٥ يساوى Δx وارتفاعه $-y = -(x^2 - 7x + 6)$ ومساحته $-(x^2 - 7x + 6)\Delta x$.

والمساحة المطلوبة إذن هى :

$$A = \int_2^6 -(x^2 - 7x + 6)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x\right)\Big]_2^6$$

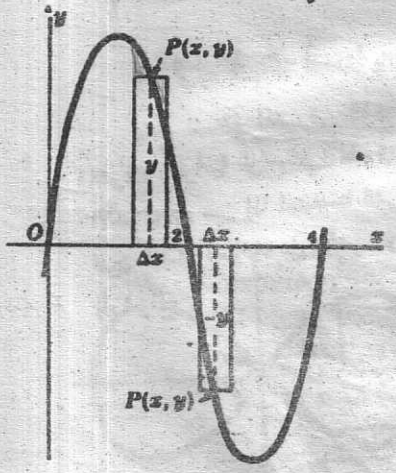
$$= \frac{56}{3} \text{ square units}$$



شكل ٣٤ — ٥

٥ – أوجد المساحة بين المنحنى $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ والمحور السينى .

المنحنى يقطع المحور السينى عند $x = 0, x = 2, x = 4$ كما هو مبين فى الشكل ٣٤ – ٦ . باستخدام الشرائح الرأسية ، نرى أن مساحة المستطيل المقرب الذى تقع قاعدته فى الفترة $0 < x < 2$ تساوى $(x^3 - 6x^2 + 8x)\,\Delta x$. وبذلك تكون مساحة ذلك الجزء من السطح الواقع فوق المحور السينى مساوية لـ $\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$. وأما مساحة المستطيل المقرب الذى تقع قاعدته فى الفترة $2 < x < 4$ تساوى $-(x^3 - 6x^2 + 8x)\Delta x$، وبذلك تكون مساحة ذلك الجزء من السطح الواقع تحت المحور السينى مساوية $\int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$. وهكذا تكون المساحة المطلوبة .



شكل ٣٤ — ٦

$$A = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx + \int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4$$

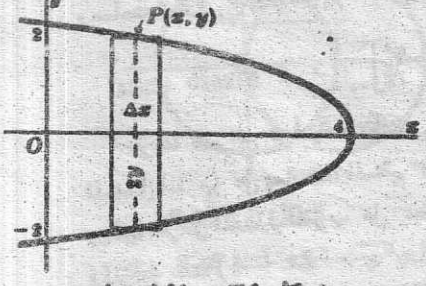
$$= 4 + 4 = 8 \text{ square units}$$

إن حساب المساحة بتكاملين محددين هنا ضرورى لأن دالة التكامل تغير إشارتها فى فترة التكامل .

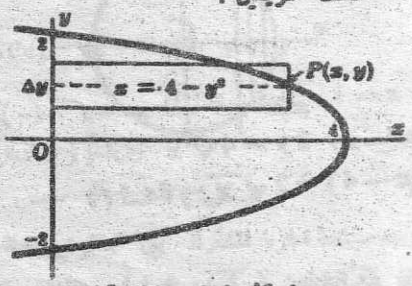
أما إذا فاتنا أن نلاحظ هذا الأمر فإننا نصل إلى النتيجة الخاطئة $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = 0$.

٦ – أوجد المساحة المحدة بالقطع المكافئ $x = 4 - y^2$ والمحور الصادى .

إن القطع المكافئ يقطع المحور السينى عند النقطة $(4, 0)$ والمحور الصادى عند النقطتين $(0, 2)$ و $(0, -2)$ وحل المسألة سنسلك طريقين :



شكل ٣٤ — ٧ (ب)



شكل ٣٤ — ٧ (أ)

طريقة الشرائح الأفقية : أن عرض المستطيل المقرب الموضح فى الشكل ٣٤-٧ (أ) يساوى Δy وطوله $x^2 - 4$ ومساحته $\Delta y (x^2 - 4)$. وأما حدى التكامل فهما $x = y$ و $x = 2 - y$ ويلاحظ من ناحية أخرى ، أن المساحة الواقعة فوق المحور السينى مساوية للمساحة الواقعة تحت نفس المحور . وعلى هذا فإن المساحة المطلوبة هى :

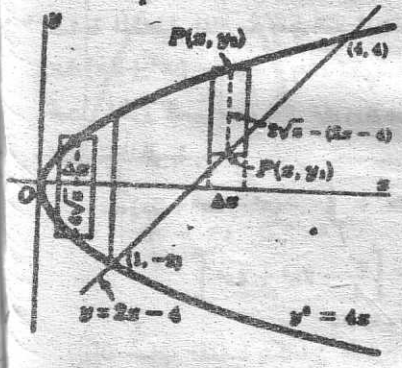
$$\int_{-3}^{0} (4 - y^2)\,dy = 2\int_{0}^{2} (4 - y^2)\,dy = 2\left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Big]_{0}^{2} = \frac{32}{3} \text{ square units}$$

طريقة الشرائح الرأسية : إن عرض المستطيل المقرب الموضح فى الشكل ٣٤ - ٧ (ب) يساوى Δx وارتفاعه $y = 2\sqrt{4 - x}$ ومساحته $2\sqrt{4 - x}\,\Delta x$. وأما حدى التكامل فهما $x = 0$ و $x = 4$ ولذلك فإن المساحة المطلوبة هى :

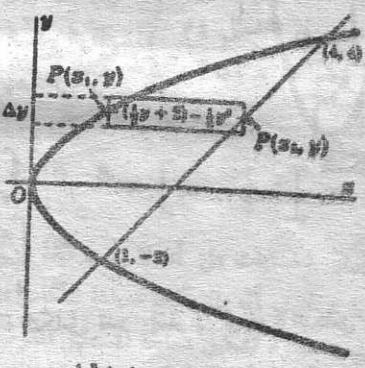
$$\int_{0}^{4} 2\sqrt{4 - x}\,dx = -\frac{4}{3}(4 - x)^{3/2}\Big]_{0}^{4} = \frac{32}{3} \text{ square units}$$

٧ - أوجد المساحة المحددة بالقطع المكافئ $4x = y^2$ والمستقيم $y = 2x - 4$.

يقطع المستقيم المفروض القطع المكافئ عند النقطتين $(2, -1)$ و $(4, 4)$ ويلاحظ من الشكلين التاليين أنه عندما نستخدم الشرائح الرأسية فإن بعض هذه الشرائح ينطلق من المستقيم إلى القطع والبعض الآخر ينطلق من أحد فرعى القطع إلى الفرع الآخر ، فى حين إذا استخدمنا الشرائح الأفقية فإن كل شريحة تنطلق من القطع إلى المستقيم . ستقدم فيما يلى الحل بالطريقتين لتبين أفضلية أحدهما على الآخر ولنبين أنه ينبغى قبل البدء فى تكوين التكامل المحدد أن نمعن النظر فى طريقتى تجزئة المنطقة إلى شرائح .



شكل ٣٤ — ٨ (ب)



شكل ٣٤ — ٨ (أ)

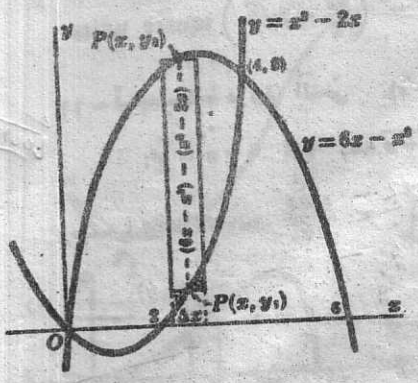
طريقة الشرائح الأفقية : بالنظر إلى الشكل ٣٤-٨ (أ) نجد أن عرض المستطيل المقرب الموضح فى الشكل Δy وطوله يساوى (قيمة x على المستقيم) - (قيمة x على القطع المكافئ) $= y + 2 - \frac{1}{4}y^2$ ومساحته تساوى $\Delta y (2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2)$ والمساحة المطلوبة تساوى :

$$\int_{-2}^{4} (2 + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{4}y^2)\,dy = \left[2y + \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{12}\right]_{-2}^{4} = 9 \text{ square units}$$

طريقة الشرائح الرأسية : بالنظر إلى الشكل ٣٤ - ٨ (ب) . وبتقسيم المساحة بالمستقيم $x = 1$ فيكون المستطيل المقرب على يسار هذا المستقيم Δx وطوله (باستخدام التناظر) يساوى $2y = 4\sqrt{x}$ ، ومساحته Δx ، $2\sqrt{x} - (2x - 4) = 2\sqrt{x} - 2x + 4$ ويكون عرض المستطيل المقرب على يمين المستقيم المذكور Δx وطوله $2\sqrt{x} - 2x + 4$ ومساحته $\Delta x (2\sqrt{x} - 2x + 4)$ والمساحة المطلوبة تساوى :

$$\int_{0}^{1} (2\sqrt{x} - 2x + 4)\,dx + \int_{1}^{4} (2\sqrt{x} - 2x + 4)\,dx = \left[\frac{8}{3}x^{3/2}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{4}{3}x^{3/2} - x^2 + 4x\right]_{1}^{4} = \frac{8}{3} + \frac{19}{3} = 9 \text{ sq. un.}$$

٨ – أوجد المساحة المحددة بالمنحنيين المكافئين $y = 6x - x^2$ ، $y = x^2 - 2x$.



شكل ٣٤ — ٩

يتقاطع القطعان عند النقطتين $(0, 0)$ و $(4, 8)$ ، ويلاحظ مقدما أن الشرائح الرأسية هي التي تعطينا الحل الأسهل.

إن عرض المستطيل المقرب Δx وارتفاعه يساوى (قيمة y على الحد الأعلى) – (قيمة y على الحد الأدنى) :

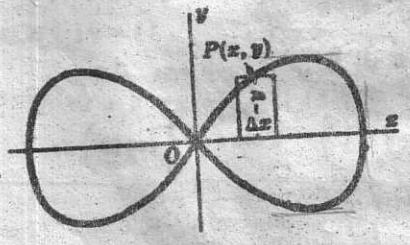
$$(6x - x^2) - (x^2 - 2x) = 8x - 2x^2 .$$

ومساحته تساوى $(8x - 2x^2)\,\Delta x$ والمساحة المطلوبة هى

$$\int_0^4 (8x - 2x^2)\,dx = \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^4 = \frac{64}{3} \text{ square units}$$

٩ – أوجد المساحة الواقعة داخل المنحنى $x^4 - x^2 = y^2$.

إن المنحنى متناظر بالنسبة للمحورين الاحداثيين وعلى هذا فإن المساحة المطلوبة تساوى أربع مرات مساحة الجزء الواقع فى الربع الأول . وعرض المستطيل المقرب يساوى Δx وارتفاعه $y = \sqrt{x^2 - x^4} = x\sqrt{1 - x^2}$ ومساحته $x\sqrt{1 - x^2}\,\Delta x$ والمساحة المطلوبة هى



شكل ٣٤ — ١٠

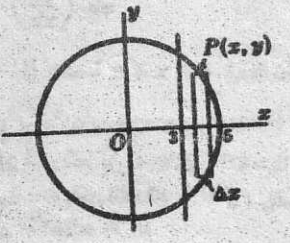
$$4\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx = \left[-\frac{4}{3}(1 - x^2)^{3/2}\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3} \text{ square units}$$

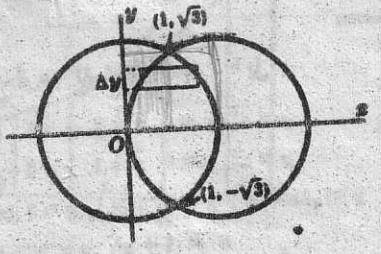
١٠ – أوجد مساحة القطعة الصغرى الواقعة بين الدائرة $x^2 + y^2 = 25$ والمستقيم $x = 3$. أنظر الشكل ٣٤ – ١١ .

$$A = \int_3^5 2y\,dx = 2\int_3^5 \sqrt{25 - x^2}\,dx = 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5}\right]_3^5$$

$$= \left(\frac{25}{2}\pi - 12 - 25\arcsin\frac{3}{5}\right) \text{ square units}$$



شكل ٣٤ — ١١



شكل ٣٤ — ١٢

١١ – أوجد مساحة الجزء المشترك بين الدائرتين $x^2 + y^2 = 4x$ و $x^2 + y^2 = 4$. أنظر الشكل ٣٤ – ١٢ .
الدائرتان عند النقطتين $(1, \pm\sqrt{3})$ ويعد المستطيل المقرب من $x = 2 - \sqrt{4 - y^2}$ إلى $x = \sqrt{4 - y^2}$.

$$A = 2\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-y^2} - (2-\sqrt{4-y^2}))\,dy = 4\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-y^2} - 1)\,dy$$

$$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + 2\arcsin\frac{1}{2}y - y\right]_0^{\sqrt{3}} = \left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right) \text{ square units}$$

another way

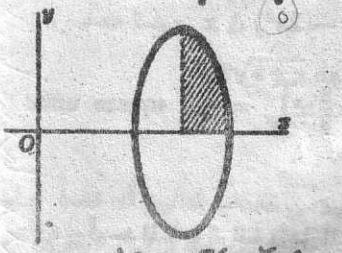
let $x = -4\sin^2\theta$

١٢ – أوجد مساحة عروة المنحنى $y^2 = x^2(4+x)$. أنظر الشكل ٢٤ – ١٢ .

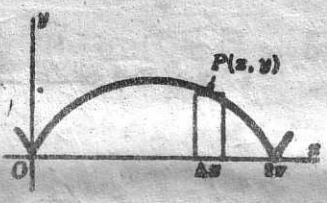
look

$$A = \int_{-4}^{0} 2y\,dx = 2\int_{-4}^{0} x^2\sqrt{4+x}\,dx. \quad \text{Let } 4+x = z^2;$$

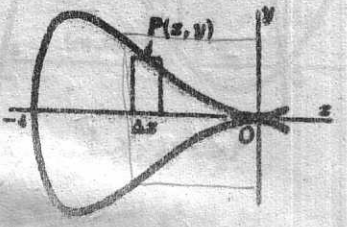
ومنه : $A = 4\int_0^{2} (z^2-4)^2 z^2\,dz = 4\left[\frac{z^7}{7} - \frac{8z^5}{5} + \frac{16z^3}{3}\right]_0^{2} = \frac{4096}{105}$ square units



شكل ٢٤ — ١٥



شكل ٢٤ — ١٤



شكل ٢٤ — ١٣

look

١٣ – أوجد المساحة الواقعة تحت قنطة المنحنى الدوري (السيكلويد) $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$. أنظر الشكل ٢٤ – ١٤ .

يرسم القنطة عندما تتغير θ من 0 إلى 2π إذن $dx = (1-\cos\theta)\,d\theta$ والمساحة هي :

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)(1-\cos\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$

$$= \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = 3\pi \text{ square units}$$

it is an ellipse because
at $\theta = 0 \Rightarrow x = 4;\ \theta = \pi/2 \Rightarrow x = 3$
at $\theta = \pi \Rightarrow x = 2;\ \theta = \pi \Rightarrow x = 2$
at $\theta = 3\pi/2 \Rightarrow y = -4$

$A = \int y\,dx$

١٤ – أوجد المساحة المحدة بالمنحنى $x = 3 + \cos\theta,\ y = 4\sin\theta$. أنظر الشكل ٢٤ – ١٥ .

look

ترسم المساحة المظللة في الشكل ($\frac{1}{4}$ المساحة المطلوبة) عندما تتغير θ من 0 إلى $\pi/2$ ولذلك فإن :

$$A = -4\int_0^{\pi/2} (4\sin\theta)(-\sin\theta)\,d\theta = 16\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2} (1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 8\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 4\pi \text{ square units}$$

$\theta = 0 \Rightarrow x = 4$
$y = 0$
$\theta = \pi/2 \Rightarrow x = 3$
$y = 4$

$\int_3^4 y\,dx = -\int_4^3 y\,dx =$
$-\int_0^{\pi/2} 4\sin\theta(1-\sin\theta)\,d\theta$

مسائل اضافية

١٥ – أوجد المساحة المحدة بما يلي :

(أ) $y = x^2,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 5$

(ب) $y = x^3,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$

(جـ) $y = 4x - x^2,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$

(د) $x = 1 + y^2,\ x = 10$

(هـ) $x = 3y^2 - y,\ x = 0,\ y = 0,\ y = 1$

(و) $x = y^2 + 4y,\ x = 0$

(ز) $y = 8 - x^2,\ y = x + 2$

(ح) $y = 2 - x^2,\ y = -x$

(ط) $y = x^2 - 4,\ y = 8 - 2x^2$

(ى) $y = x^3 - 4x^2,\ y = 4x^2$

(ك) $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$

(ل) عقدة المنحنى $9ay^2 = x(3a - x)^2$

(م) عقدة المنحنى $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = 0,\ x = 2$

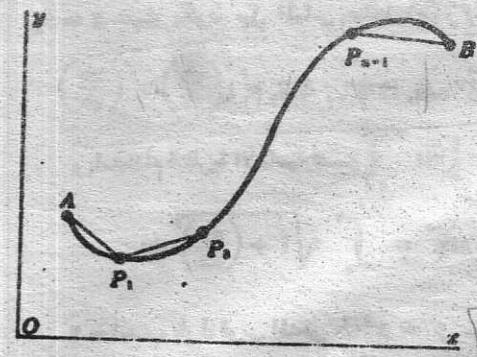
(ن) $y = \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2},\ y = 0,\ x = \pm a$

(س) $xy = 12,\ y = 0,\ x = 1,\ x = e^2$

(ع) $y = 1/(1+x^2),\ y = 0,\ x = \pm 1$

(ف) $y = \tan x,\ x = 0,\ x = \frac{1}{4}\pi$

طول قوس



شكل ٤١ — ١

طول قوس AB لمنحنى هو بالتعريف نهاية مجموع أطوال مجموعة من الأوتار المتتالية $AP_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}B$. تصل بين نقط على القوس ، عندما يزداد عدد النقط إلى ما لا نهاية بحيث يؤول طول كل وتر إلى الصفر .

(1) وإذا كانت $A(a,c)$ و $B(b,d)$ نقطتين على المنحنى $y=f(x)$ حيث $f(x)$ ومشتقتها الأول $f'(x)$ متصلتان فى الفترة $a \le x \le b$ فإن طول القوس AB يعطى بـ:

$$s = \int_{AB} ds = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (1)$$

(2) وبالمثل إذا كانت $A(a,c)$ و $B(b,d)$ نقطتين على المنحنى $x=g(y)$ حيث $g(y)$ ومشتقتها الأول بالنسبة لـ y متصلتان فى الفترة $c \le y \le d$ فإن طول القوس AB يعطى بـ :

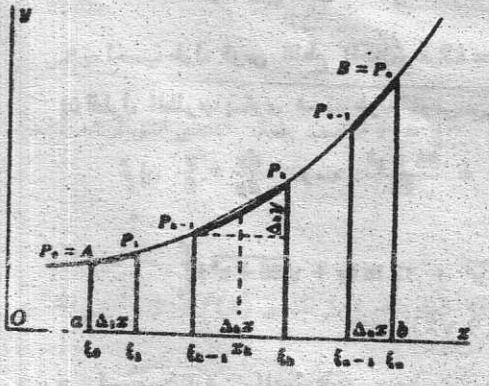
$$s = \int_{AB} ds = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

(3) أما إذا كانت $A(u=u_1)$ و $B(u=u_2)$ نقطتين من منحنى معطى بالتمثيل البارامترى $y=g(u)$ و $x=f(u)$ وإذا كانت شروط الاتصال محققة فإن طول القوس AB يعطى بـ :

$$s = \int_{AB} ds = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}\,du$$

البرهان أنظر المسألة ١ .

مسائل محلولة



شكل ٤١ — ٢

استنتج الصيغة التى تعطى طول القوس :

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

لنفرض أن الفترة $a \le x \le b$ قسمت إلى n من الفترات الجزئية بالنقط $\xi_0 = a, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n = b$ وأننا أقمنا أعمدة لتعيين النقط $P_0 = A, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n = B$ على القوس كما هو مبين فى الشكل ٤١ — ٢ . عندئذ يكون طول الوتر الممثل المبين بالشكل هو :

$$P_{n-1}P_n = \sqrt{(\Delta_n x)^2+(\Delta_n y)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta_n y}{\Delta_n x}\right)^2}\,\Delta_n x$$

واستنادا إلى قانون القيمة المتوسط (الفصل ٢١) يوجد على القوس $P_{k-1}P_k$ نقطة واحدة على الأقل ، ولتكن $x = x_k$ بحيث يكون ميل المماس عندها $f'(x)$ مساويا لـ $\frac{\Delta_k y}{\Delta_k x}$ وهو ميل الوتر $P_{k-1}P_k$ وبهذا يكون

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{1 + (f'(x_k))^2}\,\Delta_k x, \quad \xi_{k-1} < x_k < \xi_k$$

وباستخدام النظرية الأساسية نجد :

$$AB = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x_k))^2}\,\Delta_k x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

٢ – احسب طول قوس المنحنى $y = x^{3/2}$ من $x = 0$ إلى $x = 5$.

أن $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2}$ ومنه يكون طول القوس :

$$s = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big]_0^5 = \frac{335}{27} \text{ units}$$

٣ – احسب طول قوس المنحنى $x = 3y^{3/2} - 1$ من $y = 0$ إلى $y = 4$.

إن $\frac{dx}{dy} = \frac{9}{2}y^{1/2}$ ومنه $s = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{81}{4}y}\,dy = \frac{8}{243}(82\sqrt{82} - 1)$ units

٤ – احسب طول قوس المنحنى $24xy = x^4 + 48$ من $x = 2$ إلى $x = 4$.

أن $\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 - 16}{8x^3}$ ومنه $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{64}\left(\frac{x^4 + 16}{x^3}\right)^2$ وبالتالي : $s = \frac{1}{8}\int_2^4 \left(x^3 + \frac{16}{x^3}\right)dx = \frac{17}{6}$ units

٥ – احسب طول قوس منحنى السلسلة $y = \frac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a})$ من $x = 0$ إلى $x = a$.

أن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a})$ ومنه $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^{2x/a} - 2 + e^{-2x/a}) = \frac{1}{4}(e^{x/a} + e^{-x/a})^2$ وبالتالي :

$$s = \frac{1}{2}\int_0^a (e^{x/a} + e^{-x/a})\,dx = \frac{1}{2}a\left[e^{x/a} - e^{-x/a}\right]_0^a = \frac{1}{2}a\left(e - \frac{1}{e}\right) \text{ units}$$

٦ – احسب طول قوس القطع المكافئ $x = 12y^2$ المقطوع بالوتر البؤري العمودي ؛

إن الطول المطلوب يساوي ضعف طول القوس من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(3, 6)$.

ثم إن $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{6}$ ومنه $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{36 + y^2}{36}$ وبالتالي

$$s = 2\left(\frac{1}{6}\right)\int_0^6 \sqrt{36 + y^2}\,dy = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{36 + y^2} + 18\ln\left(y + \sqrt{36 + y^2}\right)\right]_0^6$$
$$= 6\{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\} \text{ units}$$

٧ – احسب طول قوس المنحنى $x = t^2,\ y = t^3$ من $t = 0$ إلى $t = 4$.

إن $\frac{dx}{dt} = 2t,\ \frac{dy}{dt} = 3t^2$ ومنه $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4t^2 + 9t^4 = 4t^2\left(1 + \frac{9}{4}t^2\right)$ وبالتالي :

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t^2} \cdot 2t\,dt = \frac{8}{27}(37\sqrt{37} - 1) \text{ units}$$

٨ – احسب طول قوس من المنحنى التوبرى $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$.

يرسم أحد أقواس المنحنى التوبرى عندما تتغير θ من $\theta = 0$ إلى $\theta = 2\pi$ ،

ثم إن $\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta} = \sin\theta,$ ومنه $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 2(1 - \cos\theta) = 4\sin^2\frac{1}{2}\theta.$

$$s = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{1}{2}\theta\, d\theta = -4\cos\frac{1}{2}\theta\Big]_0^{2\pi} = 8 \text{ units}$$

مسائل اضافية

احسب فى كل من المسائل من ٩ – ٢٠ طول المنحنى كاملا أو طول القوس المشار إليه :

٩ – $y^2 = 8x^3$ من $x = 1$ إلى $x = 8$. ج : $(104\sqrt{13} - 125)/27$ units

١٠ – $6xy = x^4 + 3$ من $x = 1$ إلى $x = 2$. ج : 17/12 units

١١ – $y = \ln x$ من $x = 1$ إلى $x = 2\sqrt{2}$. ج : $3 - \sqrt{2} + \ln\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})$ units

١٢ – $27y^2 = 4(x-2)^3$ من $(2,0)$ إلى $(11,6\sqrt{3})$. ج : 14 units

١٣ – $y = \ln(e^x - 1)/(e^x + 1)$ من $x = 2$ إلى $x = 4$. ج : $\ln(e^4 + 1) - 2$ units

١٤ – $y = \ln(1 - x^2)$ من $x = \frac{1}{4}$ إلى $x = \frac{3}{4}$. ج : $\ln 21/5 - 1/2$ units

١٥ – $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$ من $x = 1$ إلى $x = e$. ج : $\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}$ units

١٦ – $y = \ln\cos x$ من $x = \pi/6$ إلى $x = \frac{1}{4}\pi$. ج : $\ln(1 + \sqrt{2})/\sqrt{3}$ units

١٧ – $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta.$ ج : $2\pi a$ units

١٨ – $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t$ من $t = 0$ إلى $t = 4$. ج : $\sqrt{2}(e^4 - 1)$ units

١٩ – $x = \ln\sqrt{1+t^2},\ y = \arctan t$ من $t = 0$ إلى $t = 1$. ج : $\frac{1}{4}\pi$ units

٢٠ – $x = 2\cos\theta + \cos 2\theta + 1,\ y = 2\sin\theta + \sin 2\theta.$ ج : 16 units

٢١ – إذا كان موضع نقطة فى المحظة t يتعين بـ $x = \frac{1}{4}t^2,\ y = \frac{1}{3}(6t + 9)^{3/2}$ فاحسب طول المنحنى الذى ترسمه النقطة من $t = 0$ إلى $t = 4$:

ج : 20 units .

٢٢ – لتكن $P(x,y)$ نقطة ثابتة و $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ نقطة متغيرة على المنحنى $y = f(x)$. أنظر الشكل ١٧ – ١ من الفصل ١٧ .

برهن أن :

$$\lim_{Q \to P} \frac{\text{arc } PQ}{\text{chord } PQ} = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{ds/dx}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} = 1 .$$

بعض مسائل التفاضل من الباب الثاني الى الباب السابع

١) اذا كان $f(x)=x^2$, $(b)f(x)=\begin{cases}x^2, & x \neq 2\\ 0, & x \neq 2\end{cases}$ فاثبت ان $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

(a) يجب ان نوضح لاى قيمه معطاه $\varepsilon > 0$ يمكننا ايجاد $\delta > 0$ (معتمد على ε) بحيث $|x^2-4|<\varepsilon$ عند $0 < |x-2| < \delta$.

باختيار $\delta \leq 1$ بحيث ان $0 < |x-2| < 1$ او $1 < x < 3$ عند $x \neq 2$.
فان $|x+2| < 5$ δ $|x^2-4| = |x-2||x+2| < \delta$.

خذ δ تساوى 1 او $\varepsilon/5$ ايهما اقل. حينئذ $|x^2-4|<\varepsilon$ عندما $0<|x-2|<\delta$
وهذا يبرهن المطلوب.

من الممتع ان نعتبر بعض قيم عدديه مثلا اذا اردنا ان نجعل $|x^2-4| < .05$ ، فنختار
$\delta = \varepsilon/5 = .05/5 = .01$. لنوضح ان هذا فعلا هو الحالة ، نلاحظ ان اذا كان $0 < |x-2| < .01$
فان $1.99 < x < 2.01 (x \neq 2)$ وايضا
$3.9601 < x^2 < 4.0401$, $-.0399 < x^2 - 4 < .0401$ وبالتأكيد
$|x^2-4| < .05$ $(x^2 \neq 4)$ الحقيقة ان هذه المتباينات تحدث
ايضا عند $x = 2$ هى مجرد تطابق.

اذا اردنا ان نجعل $|x^2-4| < 6$ يمكننا اختيار $\delta = 1$ وهذا سيتحقق
(b) لا فرق بين برهان هذه الحاله برهان (a) لاننا فى كلتا الحالتين نستبعد $x = 2$.

٢) اثبت ان $\lim_{x\to 1} \frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1} = -8$

يجب ان نوضح انه لاى مقدار $\varepsilon > 0$ يمكننا ايجاد $\delta > 0$ بحيث ان
$0 < |x-1| < \delta$ عند $\left|\frac{2x^4-6x^2+x+3}{x-1} - (-8)\right| < \varepsilon$
حيث $x \neq 1$ يمكننا كتابه $\frac{(2x^2-4x^2-3x-3)(x-1)}{x-1} = 2x^3-4x^3-3x-3$
$= \frac{2x^4-4x^2+x+3}{x-1}$
بحذف العامل المشترك $x - 1 \neq 0$.

بعد ذلك يجب أن نوضح انه لأي مقدار $\varepsilon > 0$ يمكننا ايجاد $\delta > 0$ بحيث ان

$|2x^3 - 4x^2 - 3x + 5| < \varepsilon$, $0 < |x-1| < \delta$ وباختيار $\delta \leq 1$

فان $0 < x < 2,\ x \neq 1$.

الان $|2x^3-4x^2-3x+5| = |x-1|\ |2x^2-2x-5| < \delta\ |2x^2-2x-5|$

$< \delta\ (|2x^2| + |2x| + 5) < (8 + 4 + 5)\ \delta = 17\ \delta$.

ويأخذ δ كاصغر من 1 , $\varepsilon/17$ نصل للمطلوب.

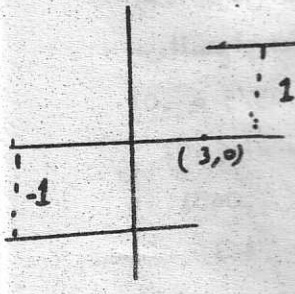
٣) بفرض $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3} & x \neq 3 \\ 0 & x = 3 \end{cases}$

(أ) ارسم بيانيا للدالة (ب) اوجد $\lim_{x \to 3+} f(x)$,

(جـ) اوجد $\lim_{x \to 3-} f(x)$ (د) اوجد $\lim_{x \to 3} f(x)$

(أ) عند $x > 3$ فان $\frac{|x-3|}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} = 1$

وعند $x < 3$ فان $\frac{|x-3|}{x-3} = -\frac{(x-3)}{x-3} = -1$



حينئذ رسم الدالة مبين في شكل ( ) يتكون من الخطوط $y = 1,\ x > 3;\ y = -1,\ x < 3$ والنقطة $(3,0)$.

(ب) عندما $x \to 3$ من اليمين فان $f(x) \longrightarrow 1$

أي أن $\lim_{x \to 3+} f(x) = 1$ كما يرى من الرسم وللبرهنة

على ذلك فيجب ان نبين انه اذا اعطيت اى $\varepsilon > 0$

يمكننا ايجاد $\delta > 0$ بحيث ان $|f(x) - 1| < \varepsilon$

$0 < |x - 1| < \delta$.

الان بما ان $f(x) = 1$, $x > 3$ لذلك فان البرهان يتكون من التفاهة ان

$|1 - 1| < \varepsilon$ عندما $0 < x - 1 < \delta$.

(جـ) عندما $x \to 3$ من اليسار فان الدالة $f(x) \to -1$ اى $\lim_{x \to 3-} f(x) = -1$

يمكن اجراء البرهان كما في حالة (ب) .

(د) $\lim_{x \to 3+} f(x) \neq \lim_{x \to 3-} f(x)$, $\lim_{x \to 3} f(x) \to \infty$.

٤) اثبت ان $\lim_{x \to 0} x \sin 1/x = 0$

يجب ان نوضح لاى مقدار $\varepsilon > 0$ يمكننا ايجاد $\delta > 0$ بحيث ان $|x \sin 1/x - 0| < \varepsilon$

عندما $0 < |x - 0| < \delta$.

اذا كانت $\delta > |x| > 0$ فان $|x \sin 1/x| = |x||\sin 1/x| \leq |x| < \delta$

حيث $|\sin 1/x| \leq 1$ لجميع قيم $x \neq 0$.

باختيار $\delta = \varepsilon$ فاننا نجد ان $|x \sin 1/x| < \varepsilon$ عند $0 < |x| < \delta$ يكمل البرهان .

د) احسب $\lim_{x \to 0+} \frac{2}{1 + e^{-1/x}}$ *

عندما $x \to 0+$ فاننا نقول ان $1/x$ تزيد بدون حدود ، $e^{1/x}$ تزيد بدون حدود ،

$e^{-1/x} + 1$ تقترب من صفر تقترب من ١ فتكون النهاية المطلوبة هى 2 .

ولبرهنه هذا التخمين اولا افتراض يجب ان نوضح انه اذا كانت $\varepsilon > 0$ فيمكننا ايجاد $\delta > 0$

بحيث ان $\left|\frac{2}{1 + e^{-1/x}} - 2\right| < \varepsilon \leftarrow \delta > x > 0$

الان $\left|\frac{2}{1 + e^{-1/x}} - 2\right| = \left|\frac{2 - 2 - 2e^{-1/x}}{1 + e^{-1/x}}\right| = \frac{1}{e^{1/x} + 1} < \varepsilon$

عند $\frac{1}{x} > \ln\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)$ ، $e^{\frac{1}{x}} > \frac{2}{\varepsilon} - 1$ ، $\frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$ اذن $0 < x < \frac{1}{\ln(2/\varepsilon - 1)}$

بافتراض $0 < \delta < 2$ باختيار $\delta = \frac{1}{\ln(2/\varepsilon - 1)}$ نرى ان افتراضنا اوتخميننا امكن

البرهنه عليه اذا كانت $0 < \varepsilon < 2$. اذا كانت $\varepsilon \geq 2$ اى قيمه المقدار $\delta > 0$

ستؤدى نفس النتيجه الان فى هذه الحاله $\frac{2}{e^{\frac{1}{x}} + 1} < \varepsilon$ لكل القيم $x > 0$.

٦) اشرح بالضبط ماالمقصود بالعبارة $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x - 1)^4} = \infty$ وبرهن صحتها .

العباره يقصد منها انه لكل عدد موجب M يمكننا ايجاد عدد موجب δ (يعتمد على M

عموما) بحيث ان $\frac{1}{(x - 1)^4} > M$ عندما $0 < |x - 1| < \delta$.

وللبرهنه على ذلك لاحظان $\frac{1}{(x-1)^4} > M$ عند $0 < (x-1)^4 < \frac{1}{M}$

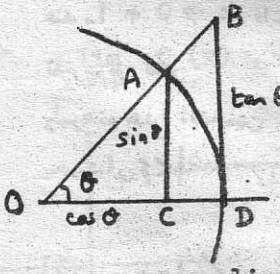
او $0 < |x - 1| < \sqrt[4]{\frac{1}{M}}$ باختيار $\delta = 1/\sqrt[4]{M}$ نصل للمطلوب .

٧) مثل ببرهان هندسي ان $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

ارسم دائرة مركزها O ونصف القطر $OA = OD = 1$ كما في شكل (2-10) نختار نقطه B على امتداد OA ونقطة C على OD بحيث ان الخطين BD, AC عمودیان على OD .

هندسيا واضح ان:

مساحة المثلث OAC < مساحة القطاع OAD < مساحة المثلث OBD



اي ان $\frac{1}{2} \sin\theta \cos\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2} \tan\theta$

بالقسمة على $\frac{1}{2} \sin\theta$

$$\cos\theta < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

او $$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

عندما $\theta \to 0, \cos\theta \to 1$ فان $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$.

٨) اذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x)$ موجودا ، فاثبت انه لابد ان يكون وحيدا

يجب ان نبرهن انه اذا $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ فإنه $l_1 = l_2$

بالفرض ، اذا اعطيت اى $\varepsilon > 0$ يمكننا ايجاد $\delta > 0$ بحيث ان

$$0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon/2$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon/2$$

من التباين (2) من صفحة ١٥

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \le |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

اى ان $|l_1 - l_2|$ أقل من اى عدد موجب ولكن ε (مهما كان صغيرا) ولذلك يجب ان يكون صفرا ، اذن $l_1 = l_2$.

٩) اذا كان $\lim_{x \to x_0} g(x) = B \neq 0$ فاثبت انه يوجد $\delta > 0$ بحيث ان

$$|g(x)| > \frac{1}{2}|B| \text{ عندما } 0 < |x - x_0| < \delta$$

بما أن $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$ فيمكن ايجاد $\delta > 0$ بحيث ان $|g(x)-B| < \frac{1}{2}|B|$

عندما $0 < |x-x_0| < \delta$. بكتابة $B = B-g(x)+g(x)$ يكون $|B| \le |B-g(x)| + |g(x)|$

أي ان $|B| < \frac{1}{2}|B| + |g(x)|$ التي منها $|g(x)| > \frac{1}{2}|B|$

(١) بفرض ان $\lim_{x \to x_0} f(x)=A$, $\lim_{x \to x_0} g(x)=B$,

اثبت ان (أ) $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$

(ب) $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB$, (جـ) $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$ if $B \neq 0$

(د) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ if $B \neq 0$

* يجب ان نوضح انه لاى مقدار $\varepsilon > 0$ يمكننا ايجاد $\delta > 0$ بحيث ان

$|f(x) + g(x) - (A + B)| < \varepsilon$ عندما $0 < |x - x_0| < \delta$

باستخدام التباين (2) صفحة 21 يكون

(١) $|[f(x)+g(x)] - (A+B)| = |[f(x)-A] + [g(x)-B]| \le |f(x)-A| + |g(x)-B|$

من الفرض، باخذ $\varepsilon > 0$ يمكننا ايجاد $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ بحيث ان

(٢) $|f(x) - A| < \varepsilon/2$ عندما $0 < |x - x_0| < \delta_1$

(٣) $|g(x) - B| < \varepsilon/2$ عندما $0 < |x - x_0| < \delta_2$

من (١ ، ٢ ، ٣)

$|[f(x) + g(x)] - (A + B)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ عندما $0 < |x - x_0| < \delta$

حيث δ تختار بحيث تكون اقل من δ_1 ، δ_2 .

(ب) لدينا $|f(x)g(x)-AB| = |f(x)[g(x)-B] + B[f(x)-A]|$

$\le |f(x)||g(x)-B| + |B||f(x)-A|$

(٤) $\le |f(x)||g(x)-B| + (B + 1)|f(x)-A|$

بما ان $\lim_{x \to x_0} f(x)=A$ يمكننا ايجاد δ_1 بحيث ان $|f(x) - A| < 1$

عندما $0 < |x - x_0| < \delta_1$ أي ان $A - 1 < f(x) < A + 1$ ، لذلك $f(x)$

تكون محدودة، اى ان $|f(x)| < P$ حيث P مقدار ثابت موجب بما ان $\lim_{x \to x_0} g(x)= B$

بفرض $\varepsilon > 0$ يمكننا ايجاد $\delta_2 > 0$ بحيث ان $|g(x) - B| < \varepsilon/2P$ عندما

$0 < |x - x_0| < \delta_2$.

بما ان $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ بفرض $\varepsilon > 0$ يمكننا ايجاد $\delta_3 > 0$ بحيث ان $|f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}$

عند $0 < |x - x_0| < \delta_3$.

باستعمال (٤) يكون لدينا

$$|f(x)g(x)-AB| < P.\frac{\varepsilon}{2P} + (|B|+1) . \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)} = \varepsilon$$

عند $0 < |x-x_0| < \delta$ حيث δ اقل من $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ وهذا يكمل البرهان .

(جـ) يجب ان نبرهن ان لاكمية $\varepsilon > 0$ يمكنا ايجاد $\delta > 0$ بحيث ان

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|g(x) - B|}{|B|\,|g(x)|} < \varepsilon \quad \text{عندما} \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

من الفرض $\varepsilon > 0$ يمكنا ايجاد δ_1 بحيث ان $|g(x)-B| < \frac{1}{2}B^2\varepsilon$ عندما $0 < |x-x_0| < \delta_1$

بما ان $\lim_{x\to x_0} g(x)=B \neq 0$ يمكنا ايجاد $\delta_2 > 0$ بحيث ان

$$|g(x)| > \tfrac{1}{2}|B| \quad \text{عندما} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2$$

بعد ذلك اذا كانت δ اقل من δ_1 , δ_2 فيمكننا كتابة

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|g(x) - B|}{|B|\,|g(x)|} < \frac{\frac{1}{2}B^2\varepsilon}{|B|\cdot\frac{1}{2}|B|} = \varepsilon \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

وهذا يبرهن المطلوب .

(د) من جزأي (ب) و (جـ)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} f(x) . \frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} f(x) . \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = A . \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$$

ويمكن برهنة ذلك مباشرة .

النتائج السابقة يمكن برهنتها ايضا في الحالات $x \to -\infty$, $x \to \infty$, $x \to x_0 -$, $x \to x_0 +$.

٢

ملاحظة : في برهان (أ) استخدمنا النتائج $|f(x)-A| < \varepsilon/2$, $|g(x)-B| < \varepsilon/2$

واصبحت النتيجة النهائية هي $|f(x) + g(x) - (A+B)| < \varepsilon$. بالطبع يكون البرهان صحيحا اذا اخذنا 2ε أو عددا موجبا من المقدار ε) بدلا من ε . وهذه الملاحظة صحيحة لبرهان الاجزاء (ب)، (جـ)، (د) .

(١١١) احسب مباشرة وباستخدام نظرية النهايات .

$$\lim_{x\to 2} (x^2-6x + 4) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} (-6x) + \lim_{x\to 2} 4$$

(أ) $= (\lim_{x\to 2} x)(\lim_{x\to 2} x) + (\lim_{x\to 2} -6)(\lim_{x\to 2} x) + \lim_{x\to 2} 4$

$= (2)(2) + (-6)(2) + 4 = -4$

بالتمرين يمكن حذف الخطوات المتوسطة

(ب) $\lim_{x\to -1} \frac{(x+3)(2x-1)}{x^2+3x-2} = \frac{\lim_{x\to -1}(x+3)\lim_{x\to -1}(2x-1)}{\lim_{x\to -1}(x^2+3x-2)} = \frac{2.(-3)}{-4} = \frac{3}{2}$

(جـ) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{6x^4 + x^3 - 3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{6 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}}$

$= \frac{\lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty} \frac{-3}{x^3} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^4}}{\lim_{x\to\infty} 6 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{-3}{x^3}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(د) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{4 + h - 4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$

(هـ) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 1.0 = 0$

لاحظ ان في (جـ) و(د) و(هـ) اذا استعملنا نظريات على النهايات بدون تمييز نحصل على مايسمى الصور غير المعينه وهي ∞/∞ وصفر/صفر وللبعد عن هذا المأزق في مثل هذه الاحوال يمكن تعديل النهاية بطريقة مناسبة ويوجد طرق اخرى لحساب النهايات

١٢) اثبت ان الدالة $f(x) = -x^2$ مستمرة عند $x = 2$.

الطريقة الاولى :

من $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 4$ ولذلك $f(x)$ مستمرة عند $x = 2$

الطريقة الثانية :

يجب ان نوضح اننا اذا اخذنا $0 < \varepsilon$ يمكن ايجاد $0 < \delta$ (معتمدة على ε)

بحيث ان $\varepsilon > |f(x)-f(2)| = |x^2-4|$ عند $\delta > |x-2|$. البرهان كحل (سؤالرقم ١٠) .

١٣) ـ(أ) اثبت ان $f(x) = \begin{cases} x \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 5, & x = 0 \end{cases}$ ليست مستمرة عند $x = 0$.

ـ(ب) هل يمكن تعريف الدالة $f(0)$ بحيث ان $f(x)$ مستمرة عند $x = 0$ ؟

(أ) من (رقم ٤) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ لكن هذه النهاية لاتساوى $f(0) = 5$

بحيث ان $f(x)$ ليست مستمرة عند $x=0$.

(ب) بتعريف الدالة $f(x)$ بحيث ان $f(0) = 0$ الدالة تصبح مستمرة . لان الدالة يمكن جعلها مستمرة عند نقطة ، وذلك باعادة تعريف الدالة عند النقطة . تسمى النقطة ازالة عدم الاستمرار .

١٤) هل الدالة $f(x) = \frac{2x^4 - 6x^3 + x + 3}{x - 1}$ متصلة عند $x = 1$ ؟

الدالة f (أ) لاتوجد فتكون الدالة غير مستمرة عند $x = 1$ بتعريف الدالة ثانيا $f(x)$ بحيث $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = -8$ (انظر مسألة ٢) الدالة تصبح مستمرة عند $x=1$ أى ان $x = 1$ هى نقطة ازالة عدم الاستمرار .

ـ اثبت ان $f(x)$ و $g(x)$ مستمرتان عند $x = x_0$ وأيضا كذلك تكون $f(x) + g(x)$

(ب) $f(x)\,g(x)$ $\frac{f(x)}{g(x)}$ اذا كانت $f(x_0) \neq 0$.

هذه النتائج يمكن الحصول مباشرة من البراهين المعطاه (بالمسألة ١٠) وذلك باخذ $A=f(x_0)$ و $B=g(x_0)$ وبكتابة $|x - x_0| < \delta$ مثل $|x - x_0| < \delta$ مقتضاه $x = x_0$.

١٥) اثبت ان $f(x) = x$ مستمرة عند أى نقطة $x = x_0$.

يجب ان نوضح انه اذا أخذنا $\varepsilon > 0$ فيمكننا ايجاد $\delta > 0$ بحيث ان $|f(x)-f(x_0)| = |x-x_0| < \varepsilon$ عند $|x - x_0| < \delta$ وباختيار $\delta = \varepsilon$ ينتج المطلوب فورا .

١٦) اثبت ان $f(x) = 2x^3 + x$ مستمرة عند أى نقطة $x = x_0$.

بما ان x مستمرة عند أى نقطة $x = x_0$ (مسألة ١٥) وايضا $2x^3$ ، $x \cdot x = x^2$ ، $x^2 \cdot x = x^3$

واخيرا $2x^3 + x$ باستخدام النظرية التى تقول ان حاصل ضرب الدوال المستمرة هى ايضا دوال مستمرة .

١٧) اثبت انه اذا كان $f(x) = \sqrt{x-5}$ عند $5 \leq x \leq 9$ حينئذ $f(x)$ تكون مستمرة عند هذه الفت

اذا x_0 اى نقطة يجب ان $5 < x_0 < 9$ فان $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \sqrt{x-5} = \sqrt{x_0-5} = f(x_0)$

ايضا $\lim_{x\to 5^+} \sqrt{x-5} = 0 = f(5)$, $\lim_{x\to 9^-} \sqrt{x-5} = 2 = f(9)$ ولذلك النتيجة تتضح .

استخدمنا هنا النتيجة $\lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt{f(x_0)}$

اذا كانت $f(x)$ مستمره عند x_0 . برهان (ε , δ) من التعريف مباشرة يمكن ايضا استخدامه .

١٨) لاى قيم المقدار x فى نطاق التعريف للدوال الاتيه تكون مستمرة .

(ا) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ الاجابة : جميع قيم x ماعدا $x = \pm 1$ (حيث المقام هو صفر) .

(ب) $f(x) = \frac{1+\cos x}{3+\sin x}$ الاجابة : جميع قيم x .

(جـ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{10+x}}$ الاجابة : جميع قيم $x > -10$.

(د) $f(x) = 10^{-1/(x-3)^3}$ الاجابة : لجميع قيم $x \neq 3$

(هـ) $f(x) = \begin{cases} 10^{-1/(x-3)^3}, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3 \end{cases}$ الاجابة : لجميع قيم x لان $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$

(و) $f(x) = \frac{x - |x|}{x}$

اذا كانت $x > 0, f(x) = \frac{x-x}{x} = 0$ اذا كانت $x < 0, f(x) = \frac{x+x}{x} = 2$

عند $x = 0$ تكون $f(x)$ غير معرفة . لذلك $f(x)$ تكون مستمره لجميع القيم ماعدا $x = 0$.

(ز) $f(x) = \begin{cases} \frac{x - |x|}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

كما فى (و) الدالة $f(x)$ تكون مستمرة عند $x < 0$.

بما ان $\lim_{x\to 0^-} \frac{x-|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+x}{x} = \lim_{x\to 0^-} 2 = 2 = f(0)$

من ذلك يتضح ان الدالة $f(x)$ مستمره (من اليسار) عند $x=0$ هكذا $f(x)$ مستمر لجميع قيم $x \leq 0$, أيا ان لجميع نقط نطاقها المعرف .

(ح) $f(x) = x \csc x = \frac{x}{\sin x}$ الاجابة : كل قيم x ماعدا ... $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$

(ط) لان $f(x)=x\cos x$, $f(0)=1$ $\lim_{x\to 0} x\cos x = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1=f(0)$

نوى $f(x)$ مستمرة لجميع قيم x ماعدا 0 و $\pm\pi$ و $\pm 2\pi$ و $\pm 3\pi$ (قارن بالجزء (ح)).

١) اوجد قيمة النهايات الاتيه اولا باستخدام التعريف وبعد ذلك باستعمال نظريات النهايات.

(أ) $\lim_{x\to 3}(x^2-3x+2)$ (ب) $\lim_{x\to -1}\frac{1}{2x-5}$ (جـ) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

(د) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{4-x}$ ( ) $\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^6-16}{h}$ ( ) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}}{x+1}$

الجواب: (أ) 2 (ب) $-\frac{1}{7}$ (جـ) 4 (د) $-\frac{1}{4}$ (هـ) 32 (و) $\frac{1}{2}$.

٢٠) بفرض $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 2x+5, & x>0\end{cases}$

(أ) انشئ بيانى $f(x)$ (ب) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (جـ) $\lim_{x\to -3} f(x)$ (د) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (هـ) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (و) $\lim_{x\to 0} f(x)$

فى كل حالة حقق اجابتك فى كل حالة . الجواب: (ب) 9 (جـ) 10- (د) 5 (هـ) لاتوجد

٢١) اوجد قيمة (أ) $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0+)}{h}$ (ب) $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0-)}{h}$ حيث $f(x)$ هى الدالة لمسالة 15 . الجواب: (أ) 2, (ب) 3 .

٢٢) (أ) اذا كانت $f(x)=x^2\cos 1/x$ أوجد قيمة $\lim_{x\to 0} f(x)$ حقق اجابتك.

(ب) هل اجابتك فى (أ) تظل كما هى اذا اعتبرنا $f(0)=2$ اشرح ذلك $f(x)=x^2\cos 1/x, x\neq 0, f(0)=2$

٢٣) اثبت ان $\lim_{x\to 3} 10^{-1/(x-3)^2}=0$ مستخدما التعريف .

٢٤) بفرض $f(x)=\frac{1+10^{-1/x}}{2-10^{-1/x}}$, $x\neq 0, f(0)=\frac{1}{2}$ (أ) اوجد قيمة $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ $\lim_{x\to 0} f(x)$

حقق اجابتك فى كل حالة . الجواب: (أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 1- (جـ) لايوجد .

٢٥) اوجد (أ) $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$ (ب) $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}$ وضح اجابتك بالرسم . الجواب: (أ) 1 (ب) 1-

١٦) اذا كانت $f(x)$ دالة معرفة فى مسألة ٢٥ هل $\lim_{x\to 0} f(x)$ توجد ؟ اشرح ذلك.

٢٧) اشرح بالضبط ما المقصود عند كتابتنا :

(أ) $\lim_{x\to 3} \frac{2-}{(x-3)^2} = -\infty$ (ب) $\lim_{x\to 0^+} (1- e^{1/x}) = -\infty$ (جـ) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{3x-2} = \frac{2}{3}$

٢٨) اثبت ان (أ) $\lim_{x\to\infty} 10^{-x} = 0$ (ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{x+\pi} = 0$

٢٩) اشرح لماذا (أ) $\lim_{x\to\infty} \sin x$ لاتوجد ، (ب) $\lim_{x\to\infty} e^{-x} \sin x$ توجد

٣٠) اذا كانت $f(x) = \frac{3x + |x|}{7x - 5|x|}$ احسب: (أ) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

(جـ) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (د) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (هـ) $\lim_{x\to 0} f(x)$

الجواب: (أ) 2 (ب) 1/6 (جـ) 2 (د) 1/6 (هـ) لايوجد .

٣١) اذا كانت $[x]$ = اكبر عدد صحيح $\leq x$ ، احسب (أ) $\lim_{x\to 3^+} (x - [x])$

(ب) $\lim_{x\to 3^-} (x - [x])$ الجواب: (أ) صفرا (ب) 1

٣٢) اذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ اثبت ان (أ) $\lim_{x\to x_0} (f(x))^2 = A^2$

(ب) $\lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$

ماهو التعميم الذى نتوقع له ان يكون صحيحا ؟ هل يمكنك البرهنة لذلك؟

٣٣) اذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, اثبت ان

(أ) $\lim_{x\to x_0} (f(x)-g(x)) = A-B$ (ب) $\lim_{x\to x_0} (af(x)+bg(x)) = aA + bB$

حيث a, b - اى ثوابت.

٣٤) اذا كانت النهايات لدوال $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ هى A, B, C على الترتيب

اثبت ان (أ) $\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)+h(x)) = A+B+C$ (ب) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)h(x) = ABC$

عم هذه النتيجة.

٣٥) اوجد قيمة كل مما ياتى باستخدام نظريات النهايات.

(أ) $\lim_{x\to 1} \left\{ \frac{2x^2 - 1}{(3x+2)(5x-3)} - \frac{2 - 3x}{x^2 - 5x + 3} \right\}$ الجواب: (أ) -8/21

(ب) $\lim_{x\to\infty} \frac{(3x-1)(2x+3)}{(5x-3)(4x+5)}$ (ب) 3/10

(جـ) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+1} \right)$ (جـ) 1

(د) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}\right)$ (د) 1/32

٣٦) اوجد قيمة $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+h} - 2}{h}$ (تنويه: افرض $x^2 = 8+h$). الجواب: 1/12

٣٧) اذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$ اثبت ان $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ مباشرة.

٣٨) بفرض $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ احسب:

(أ) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ (ب) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ (ج) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(د) $\lim_{x\to 0} (x-3)\cos \pi x$ (هـ) $\lim_{x\to 0} \frac{6x-\sin 2x}{2x+3\sin 4x}$ (و) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$

(ز) $\lim_{x\to 0} \frac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2}$ (ح) $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin \pi x - \sin 3\pi x}{x^3}$

الجواب: (أ) 3, (ب) 0, (ج) 1/2, (د) -1/ , (هـ) 2/7, (و) $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ (ز) -1 (ح) $4\pi^2$

٣٩) اذا كانت $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ اثبت ان:

(أ) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \ln \frac{a}{b}$, $a, b > 0$ (ب) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = b-a$

(ج) $\lim_{x\to 0} \frac{\tanh ax}{x} = a$

٤٠) اثبت ان $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ اذا واذا فقط $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$

٤١) اثبت ان $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مستمرة عند $x = 4$.

٤٢) اثبت ان $f(x) = 1/x$ مستمرة (أ) عند $x = 2$, (ب) في $1 \leq x \leq 3$.

٤٣) افحص استمرار كل من الدوال الاتية عند النقط المشار اليها.

(أ) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $x \neq 0, f(0) = 0$; $x = 0$ (ب) $f(x) = x - |x|$; $x = 0$

(ج) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$; $x \neq 2$, $f(2) = 3$; $x = 2$ (د) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < 1 \\ \ln x & 1 < x < 2 \end{cases}$; $x = 1$

الاجابة: (أ) غير مستمرة. (ب) مستمرة. (ج) مستمرة. (د) غير مستمرة.

٤٤) اذا كانت $[x]$ = اكبر عدد صحيح $\leq x$ افحص استمرار الدالة $f(x) = x - [x]$

في الفترة (أ) $(1 < x < 2)$ في الفترة (ب) $1 \leq x \leq 2$.

٤٥) اثبت ان $f(x) = x^3$ مستمرة في كل فترة محدودة.

٤٦) اذا كانت $f(x)/g(x), g(x)$ دوال مستمرة عند $x=x_0$ اثبت ان $f(x)$ يجب ان تكون مستمرة عند $x = x_0$.

٤٧) اثبت ان $f(0)=1$, $f(x) = (\tan^{-1}x)/x$ مستمرة عند $x = 0$.

٤٨) اثبت ان كثيرة الحدود مستمرة عند كل فترة محدودة .

٤٩) اذا كان $f(x)$, $g(x)$ كثيرة الحدود اثبت ان $f(x)/g(x)$ مستمرة عند أي نقطة $x = x_0$ حيث $g(x_0) \neq 0$.

٥٠) اوجد نقط الاستمرار لكل من الدوال الاتية :

(أ) $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)(x-4)}$ (ب) $f(x)= x^2 \sin 1/x,\ x\neq0,\ f(0)=0$

(جـ) $f(x) = \sqrt{(x-3)(6-x)},\ 3 \leqslant x \leqslant 6$ (د) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2 \sin x}$

الجواب: (أ) $x = 2, 4$ (ب) None, (جـ) None,

(د) $x = 7\pi/6 \pm 2m\pi, 11\pi/6 \pm 2m\pi,\ m = 0,1,2,\ldots$

-((مسائل محلولـــــة))-

١) بفرض $f(x) = \dfrac{3+x}{3-x},\ x\neq3$ احسب $f'(2)$ من التعريف .

$$f'(2)= \lim_{h\to 2} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim \frac{1}{h}\left(\frac{5+h}{1-h} - 5\right) = \lim \frac{1}{h} \cdot \frac{6h}{1-h} = \lim \frac{6}{1-h} = 6$$

ملاحظة : باستخدام القواعد لحساب التفاضل والتكامل الأول نجد :

$$f'(x) = \frac{(3-x)\frac{d}{dx}(3+x) - (3+x)\frac{d}{dx}(8-x)}{(3-x)^2} = \frac{(3-x)(1) - (3+x)(-1)}{(3-x)^2} = \frac{6}{(3-x)^2}$$

عند جميع النقط x حيث توجد المشتقة . بوضع $x = 2$ نجد ان $f'(2)=6$ ومع أن مثـــل هذه القواعد غالبا نافعة لكن يجب عند استعمال هذه القواعد الاستخدمها بدون تمييز (انظـــر مثال ٥) .

٢) بفرض $f(x) = \sqrt{2x-1}$. اوجد قيمة $f'(5)$ من التعريف :

$$f'(5) = \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+2h}-8}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+2h}-3}{h} \cdot \frac{\sqrt{9+2h}+3}{\sqrt{9+2h}+3} = \lim_{h\to 0} \frac{9+2h-9}{h(\sqrt{9+2h}+3)} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{9+2h}+2}$$

$$= \frac{1}{3}$$

باستخدام القواعد البسيطه لحساب التفاضل والتكامل نجد

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x-1)^{1/2} = \tfrac{1}{2}(2x-1)^{-1/2}\frac{d}{dx}(2x-1) = (2x-1)^{-1/2}$$

أى : $f'(5) = 9^{-1/2} = 1/3$.

٣) اذا كانت $f(x)$ لها مشتقة عند $x = x^o$ فاثبت ان $f(x)$ يجب ان تكون متصلة عند $x = x_o$.

$$f(x_o + h) - f(x_o) = \frac{f(x_o+h) - f(x_o)}{h} \cdot h, \quad h \neq 0$$

حينئذ $\lim_{h\to 0} f(x_o+h) - f(x_o) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h = f'(x_o).0 = 0$

بما ان $f'(x_o)$ من الفرض موجود . اذن

$$\lim_{h\to 0} f(x_o+h) = f(x_o) \ , \ \lim_{h\to 0} f(x_o+h) - F(x_o) = 0$$

ومنها يتضح ان $f(x)$ مستمرة عند $x = x_o$.

٤) بفرض ان $f(x) = \begin{cases} x \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(أ) هل $f(x)$ مستمره عند $x = 0$ ؟ (ب) هل $f(x)$ لها مشتقة عند $x = 0$ ؟

(أ) من مسأله ( ) من الباب الثانى ، $f(x)$ تكون مستمره عند $x = 0$.

$$f'(0) = \lim \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \sin 2/h - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \sin \frac{1}{h}$$

الذى لا يوجد .

هذا المثال يوضح انه بالرغم من ان الدالة مستمره عند نقطة ، ولكن ليس لها مشتقة عند النقطة أى أن عكس النظرية فى مسألة ٣ ليست بالضرورى صحيحة .

ومن الممكن ان تكون دالة مستمره ومتصله عند جميع النقط فى فتره ولكن ليس لها مشتقـــــة .

٥) بفرض $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(أ) هل $f(x)$ تفاضليه عند $x = 0$ ؟ (ب) هل $f'(x)$ مستمرة عند $x = 0$ ؟

(أ) $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin 1/h - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$

اذن $f(x)$ لها مشتقه (تفاضليه) عند $x = 0$ وقيمته = صفر

(ب) من القواعد البسيطه لعلم التفاضل والتكامل ، اذا كانت $x \neq 0$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 \sin \frac{1}{x}) = x^2 \frac{d}{dx}(\sin \frac{1}{x}) + (\sin \frac{1}{x}) \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2(\cos \frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) + (\sin \frac{1}{x})(2x) = -\cos \frac{1}{x} + 2x \sin \frac{1}{x}$$

بما ان $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} (-\cos \frac{1}{x} + 2x \sin \frac{1}{x})$

لاتوجد (لان $\lim_{x\to 0} \cos 1/x$ لاتوجد) فالدالة $f'(x)$ ليست مستمره عند $x=0$

بالرغم من ان $f'(0)$ توجد .

هذا يبين لنا اننا لانستطيع حساب $f'(x)$ في هذه الحاله بأن نوجد $f'(x)$ ثم نضع $x = 0$ ، كالمعتاد في علم التفاضل والتكامل البسيط . وهذا فقط عندما تكون المشتقة للدالة مستمره عند نقطة التي عندها نحصل على الجواب الصحيح وهذا يحدث فقط لمعظم الدوال الناتجة في علم التفاضل والتكامل البسيط .

٦) مثل تعريف " δ, ε " لمشتقة الدالة $f(x)$ عند $x = x_0$.

$f(x)$ لها مشتقة $f'(x_0)$ عند $x = x_0$ اذا كان لاي مقدار $\varepsilon > 0$ ، يمكننا ايجاد $\delta > 0$ بحيث ان

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon \text{ عند } 0 < h < \delta .$$

٧) بفرض $f(x) = |x|$. (أ) احسب مشتقة الطرف الايمن للدالة $f(x)$ عند $x = 0$.

(ب) احسب مشتقة الطرف الايسر للدالة $f(x)$ عند $x=0$ (جـ) هل الدالة $f(x)$ لها مشتقة عند $x = 0$ ؟

(أ) $f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$

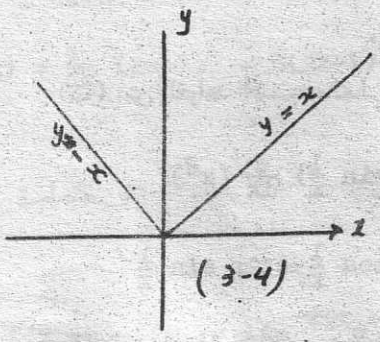
حيث $|h| = h$ عند $h > 0$.

(ب) $f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$

حيث $|h| = -h$. $h < 0$

(جـ) لا ، المشتقه عند صفر لاتوجد اذا كانت مشتقة الطرف الايمن ومشتقه الطرف الايسر غير متساويتين .

(د) الرسم المطلوب موضح فى شكل (4-3) .



(3-4)

ونلاحظ ان الميلين للخطين المستقيمين عند $y = x$ ، $y = -x$ هما ١ و ١- على الترتيب يمثلان مشتقه الطرف الايمن ومشتقه الطرف الايسر عند $x = 0$ أى ان المشتقه عند $x = 0$ لاتوجد .

٨) اثبت ان $f(x)=x^2$ تفاضليه فى $0 \leq x \leq 1$.

بفرض x_0 أى قيمه بحيث ان $0 < x_0 < 1$. فان

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x_0+h) = 2x_0$$

عند النقطه النهائيه $x = 0$.

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} h = 0$$

عند النقطه النهائيه $x = 1$.

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} (2+h) = 2$$

اذن $f(x)$ تفاضليه فى $0 \leq x \leq 1$. ويمكننا كتابه $f'(x)=2x$ عند أى نقطه فى هذه الفتره . ومن المعتاد ان نكتب $f'_+(0)=f'(0)$ ، $f'_-(1) = f'(1)$ فى هذه الحالة .

٩) اوجد معادله خط التماس للدالة $y = x^2$ عند النقطه حيث (أ) $x = 1/3$.

(ب) $x = 1$.

(أ) من (مسأله رقم 8) $f'(x_0) = 2x_0$ فيكون $f'(1/3)=2/3$. اذن معادله خط التماس هى :

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ $\quad y-1/9 = 2/3(x-1/3)$ $\quad y = 2/3\,x-1/9$

(ب) كمافي جزء (أ) $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ او $y - 1 = 2(x - 1)$

أي ان $y = 2x - 1$.

١٠) اذا كانت $y = f(x) = x^3 - 6x$ اوجد (أ) Δy ، (ب) dy ، (جـ) $\Delta y - dy$.

(أ) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = ((x+\Delta x)^3 - 6(x+\Delta x)) - (x^3 - 6x)$

$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 6x - 6\Delta x + x^3 + 6x$

$= (3x^2 - 6)\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

(ب) dy = تساوي الجزء الاساسي للمقدار Δy ويساوي

$(3x^2 - 6)\Delta x = (3x^2 - 6)dx$ لان من التعريف $\Delta x = dx$.

ونلاحظ ان $f'(x) = 3x^2 - 6$ ، أي ان $dy = (3x^2 - 6)dx$, $dy/dx = 3x^2 - 6$

ويجب ان نؤكد dy , dx ليس من الضروري ان تكون صغيرة .

(جـ) من (أ) ، (ب) $\Delta y - dy = 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = \varepsilon\Delta x$ $= 3x\Delta x + (\Delta x)^2 = \varepsilon$.

ونلاحظ ان $\varepsilon \to 0$ عندما $\Delta x \to 0$ أي ان $\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} \to 0$ عندما $\Delta x \to 0$

حينئذ $\Delta y - dy$ مقدار لانهائي في الصغر من رتبه اعلا من Δx

في حاله Δx تكون صغيره فان dy و Δy يكونان تقريبا متساويين .

١١) احسب $\sqrt[3]{25}$ تقريبا باستخدام التفاضلات .

اذا كانت Δx صغيرة فان $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x$ تقريبا .

فاذا فرضنا $f(x) = \sqrt[3]{x}$ فان $\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x} \approx \frac{1}{3}x^{-2/3}\Delta x$

(حيث $\approx$ تشير تقريبا مساويه الى) .

اذا كانت $x = 27$, $\Delta x = -2$ فان .

$\sqrt[3]{27 - 2} - \sqrt[3]{27} \approx \frac{1}{3}(27)^{-2/3}(-2)$ اي ان $\sqrt[3]{25} - 3 \approx -2/27$

اذن $\sqrt[3]{25} \approx 3 - 2/27$ او 2.926 .

ومن الممتع ان نلاحظ ان $(2.926)^3 = 25.05$ ، أي ان التقريب لا بأس به .

١٢) اثبت القانون $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$

بفرض ان f ، g تفاضليه من التعريف.

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)(g(x+h)-g(x)) + g(x)(f(x+h)-f(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\ \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

طريقة أخرى:

نفرض $u = f(x)$, $v = g(x)$ فيكون $\Delta u = f(x+\Delta x) - f(x)$, $\Delta v = g(x+\Delta x) - g(x)$,

أي ان $f(x+\Delta x) = u + \Delta u$, $g(x+\Delta x) = v + \Delta v$ اذن

$$\frac{d}{dx}uv = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\,\Delta v}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

حيث يلاحظ ان $\Delta v \to 0$ ، $\Delta x \to 0$ لان v فرضت انها تفاضليه ومستمرة.

١٣) اذا كانت $y = f(u)$ حيث $u = g(x)$ فاثبت ان $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

بفرض ان f و g دوال تفاضلية.

اذا فرضنا زيادة مقدارها $\Delta x \neq 0$ لقيمة x فيتبعها زيادتان مقدارهما Δu و Δy للمقدارين u و y على الترتيب حيث:

$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u),\quad \Delta u = g(x+\Delta x) - g(x) \qquad (1)$$

اذا كانت $\Delta u \neq 0$ نكتب $\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du} - \varepsilon$ ، بحيث ان $\varepsilon \to 0$ عندما $\Delta u \to 0$ ويكون

$$\Delta y = \frac{dy}{du}\Delta u + \varepsilon\Delta u \qquad (2)$$

اذا كانت $\Delta u = 0$ لقيم Δx ، فان (١) توضح ان $\Delta y = 0$ لهذه القيم للمقدار Δx

ولمثل هذه الاحوال سنعرف $\varepsilon = 0$.

ويترتب على ذلك فى كلتا الحالتين $\Delta u \neq 0$ او $\Delta u = 0$ ان (٢) صحيحة وبقسمة (٢) على $\Delta x \neq 0$ وبأخذ النهايات عندما $\Delta x \to 0$ فيكون

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{dy}{du} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{du} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad -(٣)$$

١٤) بفرض ان $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ استنتج القوانين

(أ) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (ب) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

(أ) (ب)
$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

(ب) اذا كانت $y = \sin^{-1} x$ فان $x = \sin y$ بأخذ المشتقه بالنسبه الى x نجد ان:

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

او

افترضناها ان القيمه الاساسيه $-\pi/2 \leq \sin^{-1}x \leq \pi/2$ اختيرت بحيث تكون موجبه ولذلك نكتب $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$ اخرى من $\cos y = \pm \sqrt{1-\sin^2 y}$.

١٥) استنتج القانون $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u}\frac{du}{dx}$ $(a>0, a\neq 1)$ حيث u داله تفاضليه للمقدار x

اعتبر $y = f(u) = \log_e u$ من التعريف.

$$\frac{dy}{du} = \lim \frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u} = \lim \frac{\log (u+\Delta u)-\log u}{\Delta u}$$

$$= \lim \frac{1}{u} \log \left(\frac{u+\Delta u}{u}\right) = \lim \frac{1}{u} \log \left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}$$

بما أن اللوغاريتم هو دالة مستمرة فهذا يمكن كتابته

$$\frac{1}{M} \log \lim \left(1+\frac{M}{M}\right)^{u/\Delta u} = \frac{1}{u} \log$$

من (مسألة 19) الفصل الثالث عند $\Delta u / u = x$.

بعد ذلك من (مسألة رقم 13) نحصل على $\frac{d}{dx}(\log u) = \frac{\log e}{u} \frac{du}{dx}$

١٦) أوجد قيمة dy/dx اذا كانت (أ) $xy^3 - 3x^2 = xy + 5$,

(ب) $e^{xy} + y \ln x = \cos 2x$.

(أ) بالتفاضل بالنسبة الى x معتبرين y كدالة فى x (احيانا نقول ان y دالة ضمنية للمقدار x لاننا لايمكننا حلا صريحا للمعادلة y بدلالة x) حينئذ .

$$\frac{d}{dx}(xy^3) - \frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(5)$$

أو $(x)(3y^2y^1)+(y^2)(1)-6x=(x)(y')+(y)(1)+0$

حيث $y'=dy/dx$ وبالحل نجد $y'=(6x - y^2+y)/(3xy^2 - x)$.

(ب) $\frac{d}{dx}(e^{xy}) + \frac{d}{dx}(y \ln x) = \frac{d}{dx}(\cos 2x)$,

$$(xy' + y) + \frac{y}{x} + (\ln x)y' = -2\sin 2x$$

بالحل نجد ان $y' = \frac{2x \sin 2x + xye^{xy} + y}{x^2 e^{xy} + x \ln x}$

١٧) اذا كانت $y = \cosh (x^2-3x + 1)$ (أ) اوجد dy/dx (ب) d^2y/dx^2

(أ) بفرض $y = \cosh u$ حيث $u = x^2-3x + 1$ اذن

وايضا : $dy/du = \sinh u$, $du/dx = 2x-3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\sinh u)(2x-3) = (2x-3) \sinh (x^2-3x + 1)$$

(ب) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\sinh u \frac{du}{dx}) = \sinh u \frac{d^2u}{dx^2} + \cosh u \left(\frac{du}{dx}\right)^2$

$$= (\sinh u)(2) + (\cosh u)(2x - 3)^3 = \sinh u \frac{d^2u}{dx^2} + \cosh u \left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

$$= 2 \sinh (x^2 - 3x + 1) + (2x - 3)^2 \cosh (x^2 - 3x + 1)$$

١٨) اذا كانت $x^2y + y^3 = 2$ اوجد (أ) y' ، (ب) y'' عند النقطة $(1, 1)$.

(أ) بالتفاضل بالنسبة الى x ، $x^2y' + 2xy + 3y^2y' = 0$

$$y' = \frac{-2xy}{x^2+3y^2} = -\frac{1}{2}$$

عند النقطة $(1, 1)$

(ب)
$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}\left(\frac{-2xy}{x^2+3y^2}\right) = -\frac{(x^2+3y^2)(2xy'+2y)-(2xy)(2x+6yy')}{(x^2+3y^2)^2}$$

بالتعويض عن $x = 1$ ، $y = 1$ و $y' = -\frac{1}{2}$ فنجد ان $y'' = -\frac{2}{3}$.

نظرية القيمة المتوسطة :

١٩) اثبت نظرية رول .

الحالة الاولى :

اذن $f'(x) = 0$ لجميع قيم x في (a,b) $f(x) = c$ في $[a,b]$

الحالة الثانية

$f(x) \neq 0$ في $[a,b]$ ، وبما ان $f(x)$ مستمرة فيوجد نقط التي عندها $f(x)$ تصل الى قيمة نهايتها العظمى ، والى قيمة نهايتها الصغرى ولتكن M و m على الترتيب (انظر مسأله 34 الفصل الثاني) .

بما ان $f(x) \neq 0$ على الاقل واحدة من القيم M,m لاتساوي صفرا فاذا فرضنا ، مثلا $M \neq 0$ وهذه $M = f(\xi)$ (انظر شكل 3-4) وفي هذه الحالة $f(\xi + h) \leq f(\xi)$.

اذا كانت $h > 0$ فان $\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \leq 0$ ،

(١) $\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \leq 0$

واذا كانت $h < 0$ فان $\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \geq 0$ ،

(٢) $\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \geq 0$

لكن من الفرض $f(x)$ لها مشتقه عند جميع النقط فى (a,b) . اذن مشتقه الطرف الايمن (١) يجب ان تساوى مشتقه الطرف الايسر (٢) وهذا يحدث فقط اذا كانا كلاهما مساويين للصفر ، والتى منها نجد ان $f'(\xi) = 0$ وهو المطلوب.

ويمكن استعمال خطق مشابه لما سبق فى حالة $M = 0$ و $m \neq 0$.

٢٠) (أ) اثبت نظريه القيمه المتوسطه. (ب) اعط تفسيرا هندسيا لهذه النظرية.

(أ) اذا عرفنا $F(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

يكون $F(a) = 0, F(b) = 0$.

ايضا اذا كانت $f(x)$ تحقق شروط الاستمرار وقابليه التفاضل المبينه فى نظرية رول ، اذن $F(x)$ تحققها أيضا.

بعد ذلك باستخدام نظريه رول للدالة $F(x)$ نحصل على

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0, \quad a<\xi<b \quad \text{أو} \quad f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad a<\xi<b$$

(ب) نفرض المنحنى ACB فى شكل ٤-٥ يمثل الرسم التخطيطى للدالة $f(x)$ هندسيا يظهر انه توجد نقطه ξ بين a و b حيث خط التماس لهذا المنحنى عند النقطة يكون موازيا للوتر AB .

ميل خط التماس $= f'(\xi)$.

ميل الوتر $AB = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

اذن ξ هى نقطه بحيث ان

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ومن الممتع ان نلاحظ ان الدالة $F(x)$ من الجزء (أ) يمثل الاختلاف الصادى للمنحنى ACB والخط المستقيم AB عند اى نقطه x فى (a , b) .

(٢١) حقق نظرية القيمه المتوسطه اذا كانت $f(x) = 2x^2-7x+10,\ a=2,\ b=5$.

$f(2) = 4,\ f(5) = 25,\ f'(\xi) = 4\xi - 7$.

اذن تتحقق نظريه القيمه المتوسطه على ان $4\xi - 7 = (25-4)/(5-2)$

او $\xi = 3.5$ وبما ان $2 < \xi < 5$. فالنظريه قد تحققت.

(٢٢) اذا كانت $f'(x) = 0$ عند جميع النقط للفتره (a,b) فأثبت ان $f(x)$ يجب ان تكون ثابته في الفتره.

اذا فرضنا ان $x_1 < x_2$ اى نقطتين مختلفتين في الفتره (a,b) . بنظريه القيمة المتوسطة عندما $x_1 < \xi < x_2$ فان $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = 0$

اى ان $f(x_1) = f(x_2)$ = مقدار ثابت . ومن هذا يتبين انه اذا كانت الدالتان لهما نفس المشتقه عند كل النقط في الفتره (a,b) فان الدالتين تختلفان فقط بمقدار ثابت.

(٢٣) اذا كانت $f'(x) > 0$ عند جميع النقط في الفتره (a,b) اثبت ان الداله $f(x)$ دقيقه (مضبوطه) تزايديه. نفرض $x_1 < x_2$ اى نقطتين مختلفتين في (a,b) وبنظريه القيمه المتوسطه عند $x_1 < \xi < x_2$ فان

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) > 0$$

حينئذ $f(x_2) > f(x_1)$ لكل $x_2 > x_1$ ولذلك فان $f(x)$ مضبوطة تزايديه.

(٢٤) (أ) اثبت ان $\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} a < \frac{b-a}{1+a^2}$

اذا كانت $a < b$.

(ب) بين ان $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \tan^{-1}\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$

(أ) بفرض $f(x) = \tan^{-1} x$ بحيث ان $f'(x) = 1/(1+x^2)$

و $f'(\xi) = 1/(1+\xi^2)$ ومن نظرية القيمه المتوسطة يكون لدينا .

$$\frac{\tan^{-1} b - \tan^{-1} a}{b-a} = \frac{1}{1+\xi^2} \qquad a < \xi < b$$

وبما ان $1/(1+\xi^2) < 1/(1+a^2)$ فان $\xi > a$ ، $1/(1+\xi^2) > 1/(1+b^2)$ فان $\xi < b$.

اذن $$\frac{1}{1+b^2} < \frac{\tan^{-1}b - \tan^{-1}a}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$$

وبالضرب في $b-a$ نحصل على المطلوب .

(ب) بفرض $a=1$, $b=4/3$ في نتيجه الجزء (أ) ، وبما ان $\tan^{-1} 1 = \pi/4$

فيكون عندنا $\frac{3}{25} < \tan^{-1}\frac{4}{3} - \tan^{-1} 1 < \frac{1}{6}$ او $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \tan^{-1}\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$

وهوالمطلوب.

٢٥) اثبت نظرية كوشي العامه للقيمة المتوسطة.

نعتبر $G(x) = f(x)-f(a) - a\{g(x)-g(a)\}$ حيث a مقدار ثابت.

اذن $G(x)$ تحقق شروط نظريه رول بشرط ان $f(x)$ و $g(x)$ تحقق شروط الاتصال والتفاضل لنظرية رول واذا كانت $G(a) = G(b) = 0$.

كلا الشرطين الاخيرين يتحققان اذا كان المقدار الثابت a يساوى $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

بتطبيق نظريه رول $G'(\xi) = 0$ عند $a < \xi < b$ فان

$0 = f'(\xi) - ag'(\xi)$ او $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$, $a < \xi < b$

وهوالمطلوب.

٢٦) برهن نظرية تايلورللقيمة المتوسطه مع الباقى لجرانج فى حالة $n = 1$.

يجب ان نوضح ان :

(أ) $$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(b-a)^2 \quad a < \xi < b$$

اعتبر الدالة

(٢) $$H(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - (b-x)^2 A$$

حيث A مقدار ثابت غيرمعين . والسبب لتكوين $H(x)$ هوانه يمكن الحصول عليهـــا من (١) بوضع x بدلا من a ونقل كل الحدود الى الطرف اليمين .

من (٢) يكون $H(b) = 0$. وللحصول على $H(a) = 0$ نختبر

$$A = \frac{f(b) - f(a) - f(a)\,(b-a)}{(b-a)^2} \qquad (٣)$$

بفرض ان $f(x)$ و $f'(x)$ تحقق شروط الاستمرار وقابليه التفاضل لنظريه رول فحينئذ $H(x)$ ايضا تحقق شروط نظريه رول ولذلك يوجد ξ بين a و b بحيث ان $H'(\xi)=0$.

من (٢) ، $H'(x)= -f''(x)(b-x)+2(b-x)A$ $\Leftarrow$ $H'(\xi)= -f''(\xi)(b-\xi)+2(b-\xi)A$

عند : $A=f''(\xi)/2$ (لان $b \neq \xi$). وبالتعويض بقيمه A في (٣)، وحلها لايجاد قيمة $f(b)$ نحصل على النتيجه المطلوبة (١).

وتعميم ماسبق عند $n > 1$ نتبع نفس الخطوات السابقة.

(٢٧) (أ) اثبت ان:

$$\sin x = \sin a + (\cos a)(x-a) - \frac{(\sin a)(x-a)^2}{2!} - \frac{(\cos \xi)(x-a)^3}{3!}$$

حيث ξ بين a و x .

(ب) استعمل الجزء (١) لحساب $\sin 51°$ واحسب الخطأ.

(أ) بفرض $f(x) = \sin x$. فان

$$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x)= -\cos x$$

بحيث ان $f(a)=\sin a,\ f'(a)=\cos a, f''(a)= -\sin a,\ f'''(\xi) = -\cos \xi$.

بالتعويض في قانون تايلور عند $n = 2$ ايان:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(\xi)(x-a)^3}{3!}$$

حيث ξ بين a و x وبذلك نحصل على المطلوب.

(ب) بفرض $a=45°=45\pi/180$ radians , $x = 51° = 51\pi/180$ radians

اذن $x - a = x/30$ radians

بما ان $\sin 45° = \cos 45° = \sqrt{2}/2$ وبالتعويض في الجزء (أ) من المساله ينتج ان:

$$\sin 51° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{30}\right) - \frac{(\sqrt{2}/2)(\pi/30)^3}{2!} - \frac{(\cos \xi)(\pi/30)^3}{3!}$$

القيمة المطلقة للخطأ تساوى $\left|\frac{-(\cos\theta)(\pi/30)^2}{3!}\right| < \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 < .0002$

اذن مجموع الثلاثه حدود الاولى (0.777) مضبوطة لثلاثه ارقام عشرية.

واذا اردنا دقة اكثر فنأخذ حدودا اكثر من قانون تايلور فى المفكوك.

(٢٨) (أ) اثبت ان $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots$.

(ب) اثبت ان e عدد غير قاسى.

(I) (أ) بفرض $f(x) = e^x$. فجميع المشتقات للداله $f(x)$ مساويه للمقدار e^x .

واذا كانت $a = 0$ ، فان $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

بينما $f^{(n+1)}(\xi) = e^{\xi}$ ولذلك مفكوك تايلور يصبح :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi} \qquad (١)$$

(II) حيث ξ يقع بين صفر و x .

① بفرض $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$ فاذا كانت $x > 0$ فان $|R_n| < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x$

و $\lim_{n\to\infty} |R_n| = 0$ (انظر مسأله 30 الفصل الثالث).

② واذا كانت $x < 0$ فان $\lim |R_n| = 0$ و $|R_n| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

③ ايضا . اذا كانت $x=0$ فان $R_n = 0$ و $\lim_{n\to\infty} |R_n| = 0$.

اذن لجميع قيم x اى ان $-\infty < x < \infty$ يكون $\lim_{n\to\infty} |R_n| = 0$

ويمكننا كتابه.

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots \qquad (٢)$$

اى ان المتسلسلة تقاربيه لجميع قيم x .

(III) (ب) من (١) يوضح $x = 1$ ويفرض ان e عدد قياسى p/q فى ابسط صورة

حيث p و q اعداد صحيحة موجبه. اذن

$$e = \frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \quad 0 < \xi < 1 \qquad (٣)$$

(٢٧) باختيار $q > n$ وبضرب طرفي (١) في $n!$ فعندئذ

$$n!e = n!\frac{p}{q} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \ldots + 1 + \frac{e^{\xi}}{n+1} \qquad (٤)$$

ونلاحظ ان $e^{\xi}/(n+1)$ عدد محصور بين صفر و ١ بينما كل حد آخر في (٤) عدد صحيح موجب. لذا نفرضنا ان e عدد قياسي نجد ان هناك تناقضا وهو ان عددا صحيحا مساويا لعدد غير صحيح. اذن e يجب ان تكون غير قياسية.

٢٦) اثبت ان قاعدة اوبتال في حاله الصور غير المعينه (١) $0/0$ ، (ب) ∞/∞.

(أ) سنفرض ان $f(x)$ و $g(x)$ تفاضلية في $a<x<b$ وايضا $f(x_0)0$ و $g(x_0) = 0$ حيث $a < x_0 < b$.

من نظرية كوشي العامه للقيمه المتوسطه (مساله 25).

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_e)}{g(x)-g(x_e)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad x_0 < \xi < x$$

فان

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

عند $x \longrightarrow x_0 +$, $\xi \longrightarrow x_0 +$.

تعديل الطريقه السابقه يمكن استخدامها لعمل النتيجه اذا كانت

$x \to x_0-$, $x \to x_0$, $x \to \infty$, $x \longrightarrow -\infty$.

(ب) نفترض ان $f(x)$ و $g(x)$ تفاضليه في $a<x<b$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$,

$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \infty$, حيث $a < x_0 < b$.

واذا فرضنا x_1 بحيث ان $a < x_0 < x < x_1 < b$. من نظرية كوشي العامه للقيمه المتوسطه.

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad x < \xi < x_1$$

اذن:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1-f(x_1/f(x)}{1-g(x_1)/g(x)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$$

التي منها نرى ان:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} \cdot \frac{1-g(x_1)/g(x)}{1-f(x_1)/f(x)} \qquad (1)$$

الان نفرض ان $\lim_{x\to x_o^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ونكتب (١) على الصوره:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - L\right)\left(\frac{1-g(x_1)/g(x)}{1-f(x_1)/f(x)}\right) + L\left(\frac{1-g(x_1)/g(x)}{1-f(x_1)/f(x)}\right) \qquad (2)$$

يمكننا اختيار x_1 قريبة من x_o بحيث ان $\left|f'(\zeta)/g'(\zeta) - L\right| < \varepsilon$

ونجعل x_1 ثابته فاننا نرى

$\lim_{x\to x_o^+} \left(\frac{1-g(x_1)/g(x)}{1-f(x_1)/f(x)}\right)$ لان $\lim_{x\to x_o} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to x_o} g(x) = \infty$

بعد ذلك ناخذ النهايه عندما $x \longrightarrow x_o$ لكل من طرفي (٢) فنجد

$$\lim_{x\to x_o^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x\to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

وبتعديل مناسب للطريقه السابقه يمكننا الحصول على النتيجه اذا كانت

$x \to x_o-$, $x \to x_o$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$

٣٠) اوجد قيمه (أ) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$ (ب) $\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}$,

(جـ) $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln \cos 3x}{\ln \cos 2x}$

كل ماسبق لهم صورة غير معينه $0/0$

(أ) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim \frac{2e^{2x}}{1} = 2$$

(ب) $$\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{-\pi \sin \pi x}{2x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{-\pi^2 \cos \pi x}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

ملاحظة:
هنا طبقت قاعدة (لأوبتال) مرتين لانها بعد التطبيق الاول تعطينا صورة غيرمعينة $(0/0)$
ولذلك نضطر الى تطبيقها مرة اخرى.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(-3\sin 3x)/(\cos 3x)}{(-2\sin 2x)/(\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x\cos 2x}{2\sin 2x\cos 3x}$$

(جـ)
$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 2x}{2\cos 3x}\right)=\left(\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{2\cos 2x}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

لاحظ فى الخطوة الرابعة استعملنا نظرية فى النهايات وذلك لتبسيط الحسابات.

(٣١) احسب: (١) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+5}{5x^2+6x-3}$ (ب) $\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}$ (جـ) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\tan 2x}{\ln\tan 3x}$

كل ماسبق له اويمكن ترتيبه على صوره غير معينه ∞/∞.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+5}{5x^2+6x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-1}{10x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

(أ)
$$\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim\frac{2x}{e^x}=\lim\frac{2}{e}=0$$

(ب)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\tan 2x}{\ln\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2\sec^2 2x)/(\tan 2x)}{(3\sec^2 3x)/(\tan 3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 2x\tan 3x}{3\sec^2 3x\tan 2x}$$

(جـ)
$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 2x}{3\sec^2 3x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\tan 2x}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{3\sec^2 3x}{2\sec^2 2x}\right)=1$$

(٣٢) اوجد قيمة $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan^{-1}x}{x^2\ln(1+x)}$

مع ان استعمال قاعدة (لأوبتال) مطبقه هنا لكن استخدامها التكرر الممتال يجعلها معقدة .
ولذلك نستخدم نظريه تايلور للقيمه المتوسطه فنحصل على النهايه بسرعه وسهوله وباستخدام النتائج التي في صفحة 78 فان :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{Px^5}{5!}. \quad \tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + Qx^5, \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + Rx^3$$

اذن النهايه المطلوبه تساوى :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-x^3/3!+Px^5)-(x-x^3/3+Qx^5)}{x^3 - x^2/2 + R x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6} + (P-Q)x^2}{1 - x/2 + Rx^2} = \frac{1}{6}$$

٣٣) اوجد قيمه $\lim_{x\to 0+} x^2 \ln x$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{2} = 0$$

النهايه المعطاه لهاصوره غير معينه $(0.\infty)$. وفى الخطوه التاليه الصوره تغيرت لكنى تعطى صوره غير معينه (∞/∞) ثم بعد ذلك طبقنا قاعدة (لأوبتال) .

٣٤) اوجد $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

بما ان $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ و $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = \infty$ النهايه لهاصورة غيرمعينة (1^∞).

بفرض $F(x) = (\cos x)^{1/x^2}$ فان $\ln F(x) = (\ln \cos x)/x^2$

التى يمكن استخدام قاعدة لاوبتال عليها .

اذن لدينا .

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(-\sin x)/(\cos x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{-2x \sin x + 2 \cos x} = -\frac{1}{2}$$

أى أن $\lim_{x\to 0} \ln F(x) = -\frac{1}{2}$ لكن بما ان اللوغاريتم هو دالة مستمرة

فان $\lim_{x\to 0} \ln F(x) = \ln (\lim_{x\to 0} F(x))$

اذن $\ln(\lim_{x\to 0} F(x)) = -\frac{1}{2}$ أو $\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-\frac{1}{2}}$

٣٥) اذا كانت $F(x) = (e^{3x} - 5x)^{1/x}$ فاوجد (أ) $\lim_{x\to 0} F(x)$ (ب) $\lim_{x\to \infty} F(x)$

الصوره غير معينه في (أ) وهي ∞^0 وأيضا في (ب) وهي 1^∞ .

بفرض $G(x) = \ln F(x) = \frac{\ln(e^{3x}-5x)}{x}$ فان $\lim_{x\to 0} G(x)$ و $\lim_{x\to \infty} G(x)$

لها صورة غير معينه وهي $0/0$ و ∞/∞ على الترتيب المستخدم قاعـــــــدة لأوبتال فيكون لدينا :

(أ) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^{3x}-5x)}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x} = \lim_{x\to \infty} \frac{9e^{3x}}{3e^{3x}-5} = \lim_{x\to \infty} \frac{27e^{3x}}{9e^{3x}} = 3$

وكما في مسأله 34 ، فان $\lim_{x\to \infty} (e^{3x}-5x)^{1/x} = e^3$

(ب) $-2 = \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}$ و $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^{3x}-5x)}{x} = \lim_{x\to 0} (e^{3x}-5x)^{1/x} = e^{-2}$

٣٦) اوجد قيمه $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2})$

هذه صوره غير معينه $\infty - \infty$ وبكتابه النهايه على الصوره $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$

ويمكن هنا استخدام قاعدة لأوبتال ولكن هذه العمليه شاقه وهناك طريقتان يمكن استخدامها .

الطريقه الاولى : ..... النهايه المطلوبه يمكن كتابتها :

$$\lim_{x\to \infty} (\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2})(\frac{x}{\sin x}) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2}$$

لان $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = (\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x})^2 = 1$

وباستخدام قاعده لأوبتال المتكرره نجد ان

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4-\sin^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2\sin x \cos x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin 2x}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos 2x}{12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sin 2x}{24x} = \lim_{x\to 0} \frac{8\cos 2x}{24} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-(x-x^3/6+Px^5)^2}{x^2(x-x^3/6+Px^5)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4/3+\text{واكثر}\quad x^6}{x^4+\text{واكثر}\quad x^6}\qquad \begin{matrix}\text{حدود تحتويه على}\\ \text{حدود تحتويه على}\end{matrix}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1/3+\text{واكثر}\quad x^3}{1+\text{واكثر}\quad x^2}=1/3\qquad \begin{matrix}\text{حدود تحتويه على}\\ \text{حدود تحتويه}\end{matrix}$$

(٣٧) اذا كانت $x=f(t)$ و $y=g(t)$ دالتين تفاضليتين فاوجد (أ) dy/dx ، (ب) d^2y/dx^2 .

(أ) بفرض ($'$) تشير الى مشتقة الدالة بالنسبة الى t اذن يكون عندنا

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{f'(t)}{g'(t)}$$ اذا كانت $g'(t)\neq 0$

(ب)
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right)}{dx/dt}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right)}{g'(t)}$$

اذا كانت $g'(t)\neq 0$ ،

$$=\frac{1}{g'(t)}\left\{\frac{g'(t)f''(t)-f'(t)g''(t)}{[g'(t)]^2}\right\}=\frac{g'(t)f''(t)-f'(t)g''(t)}{[g'(t)]^3}.$$

(٣٨) بفرض $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2} & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ (أ) اثبت ان $f'(0)=0$ (ب) $f''(0)=0$.

(أ)
$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-1/h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-1/h^2}}{h}$$

اذا كانت $h=1/u$ باستخدام قاعدة لأوبتال فيهذه النهاية تساوى

$$\lim_{u\to\infty}ue^{-u^2}=\lim_{u\to\infty}u/e^{u^2}=\lim_{u\to\infty}1/2ue^{u^2}=0$$

وبالمثل بوضع $h \to 0^+$ بالمقدار $u \to \infty$ بالمقدار $u \to -\infty$

فنجد ان $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$. أي أن $f'_-(0) = 0$

(ب)
$$f''_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f'(h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-1/h^2}\cdot 2h^{-3} - 0}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{2e^{-1/h^2}}{h^4} = \lim_{u\to 0} \frac{2u^4}{e^{u^2}} = 0$$

باستخدام قاعدة لأوبتال المتكررة .

بالمثل $f''_-(0) = 0$ وكذلك $f''(0) = 0$.

وبوجه عام $f^{(n)}(0) = 0$ حيث $n = 1,2,3, \ldots$

٣٩) بفرض الدالة $f(x)$ حيث $f^{(IV)}(x)$ توجد $a \leq x \leq b$ ،

وبفرض ان $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$

حيث $a < x_0 < b$. اثبت ان $f(x)$ لها نهاية عظمى وصغرى نسبية عند x_0 بحسب $f^{(IV)}(x_0) < 0$ او $f^{(IV)}(x_0) > 0$ على الترتيب .

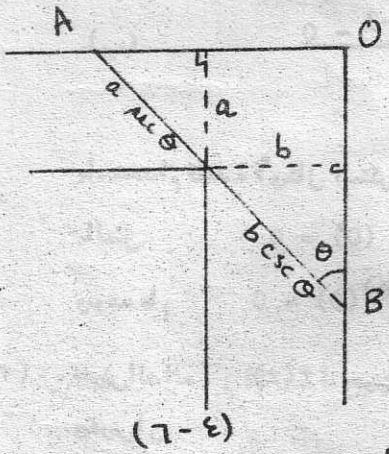
بنظرية تايلور للقيمة المتوسطة ، اذا كانت ξ بين x_0 ، x فان

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!} + \frac{f^{(IV)}(\ )(x-x_0)^4}{4!} = f(x_0) + \frac{f^{(IV)}(\xi)(x-x_0)^4}{4!}$$

اذا كانت $f^{(IV)}(x_0) > 0$ فان لجميع قيم x للمقدار δ المجاوره x_0 يكون $f(x) \geq f(x_0)$ بحيث ان $f(x)$ لها نهاية صغرى نسبية عند $x = x_0$. وبالمثل اذا كانت $f^{(IV)}(x_0) < 0$ فان لجميع قيم x للمقدار δ المجاوره x_0 يكون $f(x) \leq f(x_0)$ بحيث ان $f(x)$ لها نهاية عظمى نسبية عند $x = x_0$.

٤٠) اوجد طول اطول سلم يمكن حمله حول ركن ممر ابعاده موضحه على الشكل (٤-٦) ، اذا فرض ان السلم كان محمولا موازيا لارض .

طول اطول سلم سيساوي لاكبر جزء من الخط المستقيم الذي يمس الحائطين الخارجيين والركن الناتج من الحائطين الداخليين.



(٤-٦)

من الشكل (٤-٦) طول السلم AB هو

$$L = a \sec\theta + b \csc\theta$$

L هوالنهاية الصغرى عندما

$$dL/d\theta = a \sec\theta \tan\theta - b \csc\theta\cot\theta = 0$$

أي ان $a \sin^3\theta = b \cos^3\theta$

أو $\tan\theta = \sqrt[2]{b/a}$

اذن $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{a^{1/3}}$, $\csc\theta = \dfrac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{b^{1/3}}$

وبالتعويض في L نجد ان $L = a \sec\theta + b \csc\theta = (a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$

مع أنه من الواضح هندسيا ان هذا هواقصر طول يمكن البرهنه تحليليا ان مقدار $d^2L/d\theta^2$ موجب عندما $\theta = \tan^{-1}(\sqrt[3]{b/a})$.

(٤١) استعمل التعريف لحساب المشتقه لكل من الدوال الاتيه عند النقطه المشار اليها.

(أ) $(3x - 4)/(2x + 3)$, $x = 1$ (ب) x^2-3x^2+2x-5, $x = 2$

(جـ) $\sqrt{x}$, $x = 4$ (د) $\sqrt[3]{6x - 4}$, $x = 2$

الجواب:

(أ) 17/25 (ب) 2

(جـ) ¼ (د) ½

٤٢) بفرض $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ اثبت ان: (أ) $f(x)$ مستمره عند $x = 0$ ،

(ب) $f(x)$ لها مشتقه عند $x = 0$ ، (جـ) $f'(x)$ متصله عند $x=0$.

٤٣) بفرض $f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ بين اذا كانت الداله $f(x)$ (أ) مستمرة عند $x=0$ ،

(ب) $f(x)$ لها مشتقه عند $x = 0$.

الجواب: (أ) نعم ، (ب) نعم صفر.

٤٤) اعط برهانا آخر للنظرية فى مسألة ٦ ، ٧ صفحة ٧٢ مستخدما تعريف

٤٥) اذا كانت $f(x)= e$ ، فبين ان $f'(x_0)=e^{x_0}$ يعتمد على النتيجه $\lim_{h\to 0} (e^h-1)/h = 1$

٤٦) استخدم النتائج $\lim_{h\to 0} (\sin h)/h = 1$, $\lim_{h\to 0} (1-\cos h)/h = 0$

لتبرهن انه اذا كانت $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x_0) = \cos x_0$

٤٧) بفرض ان $f(x) = x|x|$ (أ) احسب مشتقه الطرف الايمن للداله $f(x)$ عند $x=0$ (ب) احسب مشتقه الطرف الايسر للداله $f(x)$ عند $x = 0$ ،

(جـ) هل الداله $f(x)$ لها مشتقه عند $x = 0$ ؟ (د) وضح الاستنتاج فـــــى (أ) ، (ب) ، (جـ) من رسم تخطيطى . الجواب: (أ) صفر ، (ب) صفر ، (جـ) نعم، صفر.

٤٨) ناقش (أ) الاستمرار (ب) التفاضليه للداله $f(x)= x^p \sin 1/x$, $f(0) = 0$

حيث p اى عدد موجب. ماذا يحدث فى حاله p اى عدد حقيقى .

٤٩) بفرض $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$

ناقش (أ) الاستمرار (ب) التفاضليه للداله $f(x)$ عند $0 \leq x \leq 4$.

٥٠) اثبت ان مشتقه الداله $f(x)$ عند $x = x_0$ موجوده اذا واذا فقط

$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

٥١) (أ) اثبت ان $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 6$ تفاضليه $a \leq x \leq b$,
حيث a , b مقادير ثابته.

(ب) اوجد معادلات خطوط التماس للمنحنى $y = x^3 - x^2 + 5x - 6$ عند $x=0$, $x=1$
وضح ذلك برسم تخطيطي.

(جـ) عين نقطه التقاطع لخطوط التماس في (ب)، (د) اوجد
$f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(IV)}(x), \ldots$.

الجواب: (ب) ; $y = 5x-6$, $y = 6x - 7$: (جـ) , $(1 - 1)$,
(د) $3x^2 - 2x + 5, 6x - 2, 5, 0, 0, 0, \ldots$

٥٢) اشرح بوضوح الاختلاف بين (أ) $f'(x_0+), f'+(x_0)$ (ب) $f'(x_0-), f'-(x_0)$

٥٣) اذا كانت $f(x) = x^3|x|$ ناقش وجود المشتقات المتتاليه للداله $f(x)$ عند $x = 0$.

٥٤) اذا كانت $y = f(x) = x + 1/x$ أوجد (أ) Δy, (ب) , dy,
(جـ) $\Delta y - dy$, (د) , $(\Delta y - dy)/\Delta x$, (هـ) dy/dx

الجواب: (أ) $(1 - \frac{1}{x^2})\Delta x$ (ب) $\Delta x - \frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$ (جـ) $\frac{(\Delta x)^2}{x^2(x + \Delta x)}$
(د) $\frac{\Delta x}{x^2(x + \Delta x)}$ (هـ) $1 - \frac{1}{x^2}$

٥٥) اذا كانت $f(x) = x^3 + 3x$ اوجد : (أ) Δy (ب) dy
(جـ) $\Delta y/\Delta x$, (د) dy/dx (هـ) $(\Delta y - dy)/\Delta x$
اذا كانت $x = 1$, $x = .01$.

الجواب: (أ) .0501 (ب) .05 , (جـ) 5.01 (د) 5 (هـ) .01

٥٦) باستخدام التفاضلات ، احسب القيمه التقريبية لكل من الآتي : (أ) $\sin 31°$,
(ب) $\ln(1.12)$ (جـ) $\sqrt[5]{36}$.

الجواب: (أ) 0.515 (ب) 0.12 (جـ) 2.0125.

٥٧) اذا كانت $y = \sin x$ احسب: (أ) Δy ، (ب) dy

(جـ) اثبت ان $(\Delta y - dy)/\Delta x \to 0$ عندما $\Delta x \to 0$.

٥٨) اثبت ان:

(أ) $\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$ ، (ب) $\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = \frac{d}{dx}f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)$

(جـ) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ ، $g(x) \neq 0$.

٥٩) اوجد قيمة (أ) $\frac{d}{dx}(x^3 \ln(x^2-2x+5))$ عند $x = 1$ ،

(ب) $\frac{d}{dx}(\sin^2(3x + \pi/6))$ عند $x = 0$.

الجواب: (أ) $3 \ln 4$ ، (ب) $3/2\sqrt{3}$

٦٠) اوجد اشتقاق القوانين الاتية: (أ) $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$ ، $a > 0$ ، $a \neq 1$

(ب) $\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$

(جـ) $\frac{d}{dx} \tanh u = \operatorname{sech} u \frac{du}{dx}$ حيث u دالة تفاضلية للمقدار x .

٦١) احسب (أ) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x$ ، (ب) $\frac{d}{dx}\csc^{-1}x$ ، (جـ) $\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x$ ،

(د) $\frac{d}{dx}\coth^{-1}x$ كن حريصا عند استعمال القيم الاساسية .

٦٢) اذا كانت $y = x^x$ ، احسب dy/dx (تنويه: خذ اللوغاريتم قبل التفاضل).

الجواب: $x^x(1 + \ln x)$.

٦٣) اذا كانت $y = (\ln(3x+2))^{\sin^{-1}(2x+5)}$ اوجد dy/dx عندما $x = 0$.

الجواب: $(\ln 2)^{\pi/4}\left(\frac{\pi}{4 \ln 2} + \frac{2 \ln \ln 2}{\sqrt{3}}\right)$

٦٤) اذا كانت $y = f(u)$ حيث $u = g(v)$ ، $v = h(x)$

فاثبت ان $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$ بفرض ان f ، g ، h تفاضلية.

٦٥) احسب: (أ) dy/dx ، (ب) d^2y/dx^2 اذا كان $xy - \ln y = 1$.

الجواب: (أ) $y^2/(1 - xy)$ ، (ب) $(3y^3 - 2xy^4)/(1-xy)^3$ بفرض ان $xy \neq 1$.

٦٦) اذا كانت $y = \tan x$ اثبت ان $y''' = 2(1 + y^2)(1 + 3y^2)$.

٦٧) اذا كانت $x = \sec t$, $y = \tan t$ اوجد قيمة (أ) dy/dx ، (ب) d^2y/dx^2 ، (جـ) d^3y/dx^3 عند $t = \pi/4$.

الجواب: (أ) $\sqrt{2}$ (ب) -1 ، (جـ) $3\sqrt{2}$.

٦٨) اثبت ان $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2x}{dy^2} / \left(\frac{dx}{dy}\right)^3$ مقررا الشروط الدقيقه اللازمة لذلك.

٦٩) اوجد القوانين لكل من (أ) رقم 7 ، (ب) رقم 18 ؛ (جـ) رقم 27 .

٧٠) بفرض $f(x) = 1-(x-1)^{2/3}$, $0 \leq x \leq 2$ (أ) كون رسما تخطيطيا للدالة $f(x)$.
(ب) اشرح لماذا نظريه رول لا يمكن تطبيقها على هذه الدالة أي ان لا توجد قيمة ξ حيث $f'(\xi) = 0$ عند $0 < \xi < 2$.

٧١) حقق نظرية رول اذا كان $f(x) = x^2(1 - x)^2$, $0 \leq x \leq 1$.

٧٢) اثبت انه بين جذرين حقيقيين للمعادله $e^x \sin x = 1$ يوجد على الاقل جذر واحد حقيقي للمعادله $e^x \cos x = -1$.
(تنويه: استخدم نظرية رول على الدالة $e^{-x} - \sin x$).

٧٣) (أ) اذا كانت $0 < a < b$ فاثبت ان $(1-a/b) < \ln b/a < (b/a - 1)$
(ب) استعمل نتيجه (أ) نتبين ان $1/5 < \ln 1.2 < 1/6$.

٧٤) اثبت ان $(\pi/6 + 1/8) < \sin^{-1}.6 < (\pi/6 + \sqrt{3}/15)$ باستعمال نظرية القيمة المتوسطة.

٧٥) برهن قانون الفقره الاخيره من مسأله 20 (ب)

٧٦) (أ) اذا كانت $f'(x) \leq 0$ عند كل النقط في (a , b) فاثبت ان $f(x)$ رتيبة تناقصيه في (a,b) .

(ب) ماهي الشروط للدالة $f(x)$ لكي تكون مضبوطه (دقيقه) تناقصيه في الفتره (a,b).

٧٧) (أ) اثبت ان $(\sin x)/x$ تكون مضبوطة تناقصية في $(0 و \pi/2)$.
(ب) اثبت ان $0 \leq \sin x \leq 2x/\pi$ for $0 \leq x \leq \pi/2$.

٧٨) (أ) اثبت ان $\frac{\sin b - \sin a}{\cos a - \cos b} = \cot t$ حيث t بين a و b.

(ب) بوضع $a = 0$ و $b = x$ في (أ) فوضح ان $t = x/2$. هل النتيجة صحيحة اذا كانت $x < 0$ ؟

٧٩) (أ) اثبت ان $0 < t < x$ ، $\ln(1+x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5(1+t)^5}$

(ب) استعمل (أ) لحساب $\ln(1.1)$ وحسب الدقة.

الجواب: (ب) 0.09531 بخطأ اقل من 2.10^{-6}.

٨٠) احسب (أ) $\cos 64°$ ، (ب) $\tan^{-1} 0.2$ ، (جـ) $\cosh 1$.

(د) $e^{-0.3}$ الى ثلاثة ارقام عشرية.

الجواب: (أ) 0.438 (ب) 0.197 (جـ) 1.543 (د) 0.741

٨١) اثبت نظريه تايلور للقيمة المتوسطة مع باقي لاجرانج عند (أ) $n = 2$ ، (ب) $n = 3$ ، (جـ) $n =$ اي عدد صحيح موجب.

٨٢) استنتج النتيجه (21) . لصورة كوشي للباقي.

(تنويه: استخدم نظرية رول).

$$H(x)=f(b)-f(x)-f'(x)(b-x)-\frac{f''(x)(b-x)^3}{2!}-\dots-\frac{f^{(n)}(x)(b-x)^n}{n!}-(b-x)A$$

حيث A اختيرت بحيث ان $H(a) = 0$.

٨٣) اثبت ان الباقي لجرانج . وكذلك الباقي لكوشي في نظرية تايلور يمكن كتابتها على الصورة:

$$\frac{h^{n+1} f^{n+1}(a+\theta h)}{(n+1)!} \quad , \quad \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(a+\theta h)}{n!}$$

على الترتيب حيث $h = b - a$. $0 < \theta < 1$.

٨٤) بكتابه $(b-x)PA$ بدلا من الحد الاخير $(b-x)A$ في التنويه مسأله 82 .

اوجد نظريه تايلور مع (أ) الباقي لجرانج . (ب) الباقي لكوشي . مستعملا قيما خاصه للمقدار P.

٨٥) هل يمكن استخدام قاعدة الأوتار لحساب نهايه المتتابعة؟ $u_n = n^3 e^{-n^2}$, $n=1, 2, 3, \ldots$
اشرح .

٨٦) اذا كان a هو جذر تقريبى للمعادله $f(x) = 0$ ، فوضح ان التقريب الافضل (بوجه عام) يعطى بالعلاقة $a - f(a)/f'(a)$ (طريقة نيوتن) .
(تنويه : نفرض ان الجذر المضبوط هو $a + h$ بحيث ان $f(a+h) = 0$. بعد ذلك باستعمال الحقيقه اذا كانت h صغيرة ، فان $f(a + h) = f(a)+hf'(a)$ بالتقريب) .

٨٧) باستخدام التطبيق المتكرر المستعمل فى مسألة ٨٦ ، اوجد الجذر الموجب اذا علم ان
(أ) $x^3 - 2x^2 - 7x + 7 = 0$ ، (ب) $5 \sin x = 4x$
مقربا الجواب الى ثلاثه ارقام عشريه .

الجواب: (أ) 3.268 (ب) 1.131 .

٨٨) اذا كانت D هى العامل المؤثر d/dx بحيث ان $Dy \equiv dy/dx$ بينما $D^k y \equiv d^k y/dx^k$ اثبت صيغة ليبنز
$$D^n(uv) = (D^n u)v + {}_nC_1(D^{n-1}u)(Dv) + {}_nC_2(D^{n-2}u)D^2 v + \ldots + {}_nC_r(D^{n-r}u)(D^r v) + \ldots + uD^n v$$
حيث ${}_nC_r = \binom{n}{r}$ هى معاملات ذات الحدين (انظر مسألة ٨٦ الباب الاول) .

٨٩) اثبت ان
$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2 \sin x) = (x^2 - n(n-1))\sin(x+n\pi/2) - 2nx\cos(x + n\pi/2)$$

٩٠) اذا كانت $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(2n)}(x_0)=0$ لكن $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$ ، ادرس سلوك المعادله $f(x)$ فى جيره $x = x_0$. النقطه x_0 فى هذه الحالة غالبا تسمى نقطه الانقلاب .

٩١) بفرض ان $f(x)$ تفاضليه مرتين فى (a,b) وبفرض ان $f'(a)=f'(b) = 0$ اثبت انه يوجد على الاقل نقطه واحده t فى (a,b) بحيث $|f''(t)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}(f(b) - f(a))$
اعط تفسيرا فيزيائيا محتويا على السرعة والعجلة لنقطة مادية .